Zahldarstellung, Teilbarkeitslehre

Vorbemerkung: Der Examensstoff für Lehramt an Grundschulen erstreckt sich nur auf die Kapitel 1 und 2, letzteres ohne 2.4 (bei diesen Kandidaten kommt allerdings noch etwas bzgl. Größenbereiche dazu).

1 Zahldarstellung und schriftliches Rechnen

1.1 Zahldarstellung in g-adischen Systemen

1.1.1 Grundlagen

Die Grundlagen für alles, was folgt, bildet der
Satz: Sei $g \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Dann gibt es für jedes $z \in \mathbb{N}_0$ *eindeutig* bestimmte Zahlen $n \in \mathbb{N}_0, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq a_k \leq g-1$ $(k = 0, \ldots, n)$, sodass

$$z = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \cdots + a_1 g^1 + a_0 g^0.$$

Bemerkung: $g^0 = 1$ (!)

Diese Darstellung von z heißt *g-adische Zahldarstellung* oder *Zahldarstellung im g-adischen System*. Die Zahlen $a_n, \ldots, a_0$ heißen *Ziffern* von z (im g-adischen System).

Besonders häufig:	g=10:	dekadisches System, Dezimalsystem
	g=2:	binäres System, Dualsystem
	g=16:	Hexadezimalsystem

Ist g festgelegt, so genügt es für die Angabe einer Zahl die Folge ihrer Ziffern (beginnend mit der zum größten Stellenwert gehörigen Ziffer) anzugeben.
Beispiel: $1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 101101_2$
Im Folgenden beziehen sich Ziffernfolgen ohne zusätzliches Suffix auf das dekadische System, ansonsten wird die Basis g des Systems der Ziffernfolge als Suffix beigefügt.
Falls $g > 10$, verwendet man als zusätzliche Ziffern die Buchstaben A, B, C,..., z.B. besteht für das Hexadezimalsystem folgende Zuordnung:

Hex.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Dez.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

1.1.2 Umwandlung vom g-adischen System ins Dezimalsystem

Beispiele:

$$\begin{aligned} A1FC57D_{16} &= 10 \cdot 16^6 + 1 \cdot 16^5 + 15 \cdot 16^4 + 12 \cdot 16^3 + 5 \cdot 16^2 \\ &+ 7 \cdot 16^1 + 13 \cdot 16^0 \\ &= 169854333 \\ 3214_5 &= 3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 \\ &= 434 \end{aligned}$$

1.1.3 Umwandlung vom Dezimalsystem ins g-adische

Es stehen 2 Methoden zur Verfügung:

1. Ermittle zuerst den höchsten Stellenwert.
   Z.B.: 61 soll im 3-adischen System dargestellt werden. Die höchste Dreierpotenz, die in 61 "hineinpasst", ist $3^3 = 27$. Es ist $61 : 27 = 2$ R 7, also $61 = 2 \cdot 3^3 + 7$. Die höchste Dreierpotenz, die in 7 "hineinpasst", ist 3^1. Es ist 7:3=2 R 1, also $7 = 2 \cdot 3^1 + 1$. Der Rest ist kleiner als 3, damit sind wir fertig.
   Ergebnis: $61 = 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 = 2021_3$.

2. Umwandeln durch *Bündeln*:
   Konkrete Idee: Von 61 Hosenknöpfen werden je 3 in ein "Briefchen" verpackt (gebündelt), jeweils 3 "Briefchen" werden zu einem "Brief" zusammengefasst, jeweils 3 "Briefe" zu einem "Päckchen", usw.

In jedem	Briefchen	sind dann	3^1	Stück,
In jedem	Brief	sind dann	3^2	Stück,
In jedem	Päckchen	sind dann	3^3	Stück, usw.

   Das Ergebnis des "Bündelns" kann man dann in einem Stellenwertschema so darstellen:

3^4	3^3	3^2	3^1	3^0
	2	$\leftarrow 6$	$\leftarrow 20$	1
		$\downarrow$	$\downarrow$	
		0	2	

   Erläuterung: Anzahl der Briefchen: 61:3 = 20 Rest 1
   Anzahl der Briefe : 20:3 = 6 Rest 2
   Anzahl der Päckchen: 6:3 = 2 Rest 0

1.2 Schriftliche Addition

Idee: Die zum selben Stellenwert gehörigen Ziffern werden jeweils zusammengezählt. Problem ist der "Übertrag", wenn sich Teil-Ergebnisse ergeben, die größer oder gleich der nächsthöheren Potenz sind.
Die folgenden Beispiele sollen die Einzelheiten verdeutlichen:

1. $1011_3 + 1101_3$

   Stellenwertschema:

3^3	3^2	3^1	3^0
1	0	1	1
+1	1	0	1
2	1	1	2

   Endform:
   $$\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 1 & 1 \\ +1 & 1 & 0 & 1 \\ \\ \hline 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

2. $1012_3 + 1102_3$

   Stellenwertschema:

3^3	3^2	3^1	3^0
1	0	1	2
+1	1	0	2
		$\boxed{1}$	
2	1	2	$\nwarrow \boxed{1}1$

   Erläuterung: $2 + 2 = 4 = 11_3$

   Endform:
   $$\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 1 & 2 \\ +1 & 1 & 0 & 2 \\ & & {\scriptstyle 1} & \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

3. $2212_3 + 1221_3$

   Stellenwertschema:

3^4	3^3	3^2	3^1	3^0
	2	2	1	2
	+1	2	2	1
$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	
1	$\nwarrow \boxed{1}1$	$\nwarrow \boxed{1}2$	$\nwarrow \boxed{1}1$	$\nwarrow \boxed{1}0$

Erläuterung: $1 + 2 = 3 = 10_3$
$2 + 2 = 4 = 11_3$
$3 + 2 = 5 = 12_3$

Endform:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 2 & 2 & 1 & 2 \\
 & & +1 & 2 & 2 & 1 \\
{\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\
\hline
1 & & 1 & 2 & 1 & 0
\end{array}$$

Tipp: Da wir nur im dekadischen Rechnen geübt sind, ist eine "Übertragungstabelle" für das Lösen solcher Aufgaben günstig, z.B.

dek.	1	2	3	4	5
3-ad.	1	2	10	11	12

4. $AFC15_{16} + C58A7_{16}$

Übertragungstabelle

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

$$\begin{array}{cccccc}
 & A & F & C & 1 & 5 \\
 & C & 5 & 8 & A & 7 \\
 & 1 & 1 & & & \\
\hline
1 & 7 & 5 & 4 & B & C
\end{array}$$

Erläuterung:	Hex		Dek		Hex
	7+5	=	12	=	C
	A+1	=	11	=	B
	C+8	=	20	=	14
	6+F	=	21	=	15
	1+C+A	=	23	=	17

1.3 Schriftliche Subtraktion

Idee: Die zu einem gemeinsamen Stellenwert gehörigen Ziffern werden voneinander abgezogen. Probleme, falls die erste Ziffer (des Minuenden) kleiner als die zweite Ziffer (des Subtrahenden) ist. Für dieses Problem gibt es im wesentlichen 2 verschiedene Lösungen:

(A) “Borgemethode“: Die zu kleine Zahl wird durch “Borgen“ vom nächst höheren Stellenwert erweitert.

(B) “Gleichsinniges Erweitern“: Sowohl der Minuend als auch der Subtrahend werden um einen Stellenwert erweitert. Dieser Stellenwert wird dabei im Minuend “entbündelt“.

Die folgenden Beispiele sollen das Ganze erläutern.

1. $4332_5 - 3321_5$

5^3	5^2	5^1	5^0
4	3	3	2
-3	3	2	1
1	0	1	1

2. $4331_5 - 3324_5$

(A)

5^3	5^2	5^1	5^0
4	3	3	1
-3	3	2	4

$\longrightarrow$

5^3	5^2	5^1	5^0
4	3	2	11
-3	3	2	4
1	0	0	2

Bemerkung: $11_5 - 4_5 = 2$
(Tipp: Wieder eine “Übertragungstabelle“ verwenden!)
Endform:

$$\begin{array}{rccc} & & 2 & \\ 4 & 3 & \cancel{3} & 11 \\ -3 & 3 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{rccc} 4 & 3 & \dot{3} & 1 \\ -3 & 3 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \quad \text{“}\dot{3}\text{“=“2“!}$$

(B)

5^3	5^2	5^1	5^0	
4	3	2	11	+ 5 Einer
-3	3	2	4	+ 1 Fünfer
		$_1$		
1	0	0	2	

Endform:

$$\begin{array}{rccc} 4 & 3 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & 4 \\ & & _1 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

3. $53232_6 - 44443_6$

dez.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6-ad.	1	2	3	4	5	10	11	12	13	14	15

(A)
$$\begin{array}{rrrrr} 4 & 12 & 11 & 12 & \\ \cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{3} & 12 \\ -4 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ \hline 0 & 4 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{rrrrr} \dot{5} & \dot{3} & \dot{2} & \dot{3} & 2 \\ -4 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ \hline 0 & 4 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

(B)
$$\begin{array}{rrrrr} 5 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ \text{-}4 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ \hline 0 & 4 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

$12_6 - 3_6 = 5_6$
$13_6 - 5_6 = 4_6$
$12_6 - 5_6 = 3_6$
$13_6 - 5_6 = 4_6$

4. $53202_6 - 44443_6$

(A)
$$\begin{array}{rrrrr} 4 & 12 & 11 & 5 & \\ \cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{1}0 & 12 \\ -4 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ \hline 0 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{array}$$

Hier muss der nächsthöhere Stellenwert “angepumpt“ werden!

oder
$$\begin{array}{rrrrr} \dot{5} & \dot{3} & \dot{2} & \dot{0} & 2 \\ \text{-}4 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ \hline 0 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{array}$$

“$\dot{0}$“= 5(!)

Regel: Wenn 0 überpunktet wird, muss auch die nächste Ziffer überpunktet werden.

(B)
$$\begin{array}{rrrrr} 5 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ \text{-}4 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ \hline 0 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{array}$$

Fazit: Der Algorithmus des gleichsinnigen Erweiterns ist bei Nullen im Minuenden einfacher als der des Borgens.

1.4 Schriftliche Multiplikation

1.4.1 Grundlagen

1. Kleines 1×1 bis zur Aufgabe $(g-1) \cdot (g-1)$.
   Im Dualsystem also nur $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$.

2. **Nuller-Regel:** Multiplikation mit einem Stellenwert bedeutet Anhängen von so vielen Nullen, wie der Stellenwert in der vorgegebenen g-adischen Darstellung hat.
   Beweis: Sei $z = a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \cdots + a_1 g^1 + a_0 g^0$; ein Stellenwert hat die Form g^r, wobei r die Anzahl der Nullen in der g-adischen Darstellung ist.

$$\begin{aligned} z \cdot g^r &= a_n g^{n+r} + a_{n-1} g^{n-1+r} + \cdots + a_1 g^{1+r} + a_0 g^r \\ &+ \underbrace{0 \cdot g^{r-1} + 0 \cdot g^{r-2} + \cdots + 0 \cdot g^1 + 0 \cdot g^0}_{\text{r Nullen (!)}} \end{aligned}$$

3. **halbschriftliches Multiplizieren:** additives Zerlegen eines Faktors in Vielfache von Stellenwerten und Anwendung des Distributiv-Gesetzes
   Z.B.: $123_4 \cdot 3_4 = 100_4 \cdot 3_4 + 20_4 \cdot 3_4 + 3_4 \cdot 3_4$

$$\begin{array}{rcccc} 3_4 \cdot 3_4 = & & & 2 & 1_4 \\ 20_4 \cdot 3_4 = & & 1 & 2 & 0_4 \\ 100_4 \cdot 3_4 = & & 3 & 0 & 0_4 \\ & & {\scriptstyle 1} & & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 1_4 \end{array}$$

dek	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4-ad.	1	2	3	10	11	12	13	20	21

1.4.2 Schriftliche Endform bei einstelligem Multiplikator

Man gelangt zur schriftlichen Endform, wenn man wie im obigen halbschriftlichen Verfahren vorgeht, aber nur die jeweiligen Einer hinschreibt bzw. die zweite Ziffer im Kopf zum nächsten Teilergebnis addiert. Günstig ist es, wenn man sich die jeweiligen zweiten Ziffern auf einen "Schmierzettel" schreibt und nach Gebrauch durchstreicht.

Bsp. 1: $123_4 \cdot 3_4 = 1101_4$ $\qquad \cancel{2}\ \cancel{2}$

Bsp. 2: $24043_5 \cdot 3_5 = 132234_5$ $\qquad \cancel{2}\ \cancel{2}\ \cancel{1}$

dek	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5-ad.	1	2	3	4	10	11	12	13	14	20	21	22

Erläuterung: $3_5 \cdot 3_5 = 14_5$; 4 an, 1 gemerkt
$4_5 \cdot 3_6 = 22_5$; $22_5 + 1_5 = 23_5$; 3 an, 2 gemerkt
$0_5 \cdot 3_5 = 0_5$; $0_5 + 2_5 = 2_5$; 2 an
$4_5 \cdot 3_5 = 22_5$; 2 an, 2 gemerkt
$2_5 \cdot 3_5 = 11_5$; $11_5 + 2_5 = 13_5$; 13 an

1.4.3 Schriftliche Endform bei mehrstelligen Multiplikanden

Idee: Zerlegung in mehrere Multiplikationen mit jeweils einstelligen Multiplikanden.
Bsp: $123_4 \cdot 123_4 = 123_4 \cdot 100_4 + 123_4 \cdot 20_4 + 123_4 \cdot 3_4$
Folgendes Schema ist günstig:

$$\begin{array}{cccccc}
123_4 & \cdot & 1 & 2 & 3_4 & = \\
1 & 2 & 3 & 0 & 0 & \\
 & 3 & 1 & 2 & 0 & \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
 & {\scriptstyle 1} & & & & \\
\hline
2 & 3 & 1 & 2 & 1_4 &
\end{array}$$

Die jeweiligen Endnullen können dann auch weggelassen werden:

$$\begin{array}{ccccccc}
2403_5 & & \cdot & 1 & 0 & 3_5 & = \\
2 & 4 & 0 & 3 & & & \\
 & 1 & 3 & 2 & 1 & 4 & \\
{\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & & & & \\
\hline
3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4_5 &
\end{array}$$

Bemerkung: Multiplikation im Dualsystem läuft praktisch auf fortgesetzte Addition hinaus:

$$\begin{array}{ccccccc}
1011_2 & & \cdot & 1 & 0 & 1_2 & = \\
1 & 0 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
 & {\scriptstyle 1} & & & & & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1_2 &
\end{array}$$

1.5 Schriftliche Division

Idee: Der Dividend wird entsprechend den Stellenwerten zerlegt, die jeweils anfallenden Teilreste werden entbündelt und zu den nächstkleineren Stellenwerten addiert.

Bsp. 1: 441:3=(4H+4Z+1E):3

1. Schritt 4H:3=$\underline{1\text{H}}$ Rest 1H
   Entbündeln des Restes: 1H=10Z $\Rightarrow$ 10Z + 4Z =14Z
2. Schritt 14Z:3=$\underline{4\text{Z}}$ Rest 2Z
   Entbündeln des Restes: 2Z=20E $\Rightarrow$ 20E+1E=21E
3. Schritt 21E:3=$\underline{7\text{E}}$ fertig.

Ergebnis: 441:3=1H+1Z+7E=147

Kurzform:
$$\begin{array}{cccl}
4 & 4 & 1 & :3=147 \\
3 & & & \\
\cline{1-1}
1 & 4 & & \\
1 & 2 & & \\
\cline{1-2}
 & 2 & 1 & \\
 & 2 & 1 & \\
\cline{2-3}
 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Bsp. 2:
$$\begin{array}{cccccl}
4 & 1 & 3 & 4 & 1_5 & :3_5 = 12112_5 \\
3 & & & & & \\
\cline{1-1}
1 & 1 & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
\cline{1-2}
 & 0 & 3 & & & \\
 & & 3 & & & \\
\cline{3-3}
 & & 0 & 4 & & \\
 & & & 3 & & \\
\cline{4-4}
 & & & 1 & 1 & \\
 & & & 1 & 1 & \\
\cline{4-5}
 & & & 0 & 0 &
\end{array}$$

Am einfachsten wird die schriftliche Division im Dualsystem, da hier nur darauf geachtet werden muss, ob der Teildividend $\geq$ Divisor oder $<$ Divisor ist.

$$
\begin{array}{ccccccccccc l}
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & : 11101_2 = 110100_2 \text{ Rest } 101_2 \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & & & & \\
\cline{2-6}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & & & \\
\cline{2-7}
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
\cline{5-8}
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & \\
\cline{5-9}
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & & \\
\cline{9-10}
 & & & & & & & & 1 & 0 & 1 & \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & \\
\cline{9-11}
 & & & & & & & & 1 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

2 Teilbarkeitslehre

2.1 Basisdefinitionen und Beispiele

Sei $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}_0$. a heißt genau dann **Teiler** von b, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodaß $a \cdot n = b$. Man schreibt dann: „a/b“.
Beispiel: $3/12$, denn $3 \cdot 4 = 12$.
b heißt genau dann **Vielfaches** von a, wenn a/b.
Bemerkung: Jede natürliche Zahl x ist ein Teiler von 0, denn $x \cdot 0 = 0$.

Die Menge aller Teiler einer natürlichen Zahl a wird üblicherweise mit T_a, die Menge aller Vielfachen von a wird mit V_a bezeichnet.
Beispiel: $T_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$; $V_3 = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$.

Eine natürliche Zahl p heißt **Primzahl**, wenn $p \neq 1$ und $T_p = \{1, p\}$.
Eine natürliche Zahl, die keine Primzahl ist, heißt **zusammengesetzte Zahl**.

Für $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ ist der **größte gemeinsame Teiler** $\mathrm{ggT}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ definiert als das größte Element der Durchschnittsmenge $T_{a_1} \cap T_{a_2} \cap \cdots \cap T_{a_n}$.
Das **kleinste gemeinsame Vielfache** $\mathrm{kgV}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ist festgelegt als das kleinste Element des Durchschnitts $V_{a_1} \cap V_{a_2} \cap \cdots \cap V_{a_n}$.
Beispiel: $\mathrm{ggT}(12, 18, 30) = \max[\{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \cap \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \cap$
$\cap \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}] = 6$.
$\mathrm{kgV}(12, 18) = \min[\{12, 24, 36, 48, 60, 72, \dots\} \cap \{18, 36, 54, 72, \dots\}] = 36$.

Die beiden natürlichen Zahlen $a > 1$ und $b > 1$ heißen genau dann **teilerfremd**, wenn $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$.

Beispiel: 5 und 7 sind teilerfremd.

2.2 Elementare Teilbarkeitsregeln

Generell unterscheidet man zwischen zwischen solchen Teilbarkeitsregeln, die von der Zahldarstellung unabhängig sind — und hier „elementar“ genannt werden — und solchen, die von der Art der Zahldarstellung abhängig sind (z.B. Endziffernregeln, Quersummenregeln).

Satz 0 (Transitivität der Teilerrelation): Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Wenn a/b und b/c, so gilt auch a/c.
Beweis: Aus a/b folgt die Existenz einer natürlichen Zahl n mit $an = b$. Aus b/c folgt die Existenz einer nat. Zahl m mit $bm = c$. Aus der ersten Gleichung ergibt sich durch Multiplikation beider Seiten: $anm = bm$, also folgt insgesamt: $anm = c$ und damit die Behauptung.

Satz 1: Seien $a, b, x \in \mathbb{N}$ und $a \geq b$.
Wenn x/a und x/b, so gilt auch $x/(a \pm b)$.
Beweis: Aus x/a folgt die Existenz einer nat. Zahl n, sodaß $x \cdot n = a$. Ebenso gibt es aufgrund der Voraussetzung x/b und $a \geq b$ ein natürliches m mit $x \cdot m = b$ und $n \geq m$. Addition (Subtraktion) der beiden Gleichungen ergibt $nx \pm mx = a \pm b$ bzw. $(n \pm m)x = a \pm b$. $a \pm b$ ist also ein Vielfaches von x, was zu zeigen war.

Satz 2: Seien $a, b, x \in \mathbb{N}$.
Wenn x/a oder x/b, so gilt auch $x/(ab)$.
Beweis: Es ist nun nur vorausgesetzt, daß **einer** der beiden Fälle x/a oder x/b zutrifft. Nehmen wir zuerst den Standpunkt ein, daß x/a. Wie im Beweis von Satz 1 gilt dann $nx = a$. Multiplikation mit b ergibt $bnx = ab$, woraus folgt, daß ab ein Vielfaches von x ist, was zu zeigen war. Falls nun andererseits nicht x/a, sondern x/b gelten würde, könnte man analog argumentieren.

Satz 3: Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ und a, b teilerfremd.
Wenn a/c und b/c, so folgt ab/c.
Beweis: Mit geeigneten natürlichen n und m gilt $an = c$ und $bm = c$, folglich $an = bm$ bzw. $a/(bm)$. Da a und b teilerfremd sind, kann letztere Bedingung nur erfüllt sein, wenn a/m (das sieht man etwa mit Hilfe des Satzes über die eindeutige Primfaktorzerlegung (3.3) ein.) Es gibt also ein natürliches r, sodaß $ar = m$. Kombiniert man diese Gleichung mit der bereits aufgestellten $bm = c$, so erhält man $bar = c$ und somit die Behauptung.

Bemerkung: Satz 3 ist besonders nützlich als Ergänzung zu den von der Zahldarstellung abhängigen Teilbarkeitsregeln. Hat man etwa gezeigt, daß eine Zahl durch 2 und 3 teilbar ist, weiß man „automatisch“, daß sie auch durch 6 teilbar sein muß.

2.3 Teilbarkeitsregeln in der dekadischen Zahldarstellung

Im folgenden wird vorausgesetzt, daß die „Ziffern“ $a_0, a_1, \ldots, a_m$ der natürlichen Zahl z sich auf die dekadische Darstellung

$$z = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0$$

beziehen.

2.3.1 Endziffernregeln

Regel 1: z ist genau dann durch 2^n (5^n) teilbar ($n \in \mathbb{N}$), wenn die aus den letzten n Ziffern von z gebildete Zahl $z_n = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0$ durch 2^n (5^n) teilbar ist.
Beweis: Wir setzen zuerst voraus, daß z_n durch 2^n (5^n) teilbar ist. Es gilt dann: $z = a_m \cdot 10^m + \cdots + a_n \cdot 10^n + z_n$ mit $m \geq n$. Da 10^m, 10^{m-1}, $\ldots$, 10^n automatisch durch 2^n (5^n) teilbar sind und außerdem nach Vor. z_n durch 2^n (5^n) teilbar ist, folgt aus Satz 1 (in Kombination mit Satz 2), daß auch z durch 2^n (5^n) teilbar ist.
Sei nun vorausgesetzt, daß z durch 2^n (5^n) teilbar ist. Dann gilt

$$z_n = z - (a_m \cdot 10^m + \cdots + a_n \cdot 10^n).$$

Da z nach Vor. und die Klammer „automatisch“ jeweils durch 2^n (5^n) teilbar sind, muß wegen Satz 1 auch z_n durch 2^n (5^n) teilbar sein.

2.3.2 Quersummenregeln

Regel 2: z ist genau dann durch 3 (bzw. 9) teilbar, wenn die Quersumme $q = a_0 + a_1 + \cdots + a_m$ durch 3 (bzw. 9) teilbar ist.
Beweis: Sei zuerst vorausgesetzt, daß die Quersumme durch 3 (9) teilbar ist. Es ist

$$z = q + a_m \cdot (10^m - 1) + a_{m-1} \cdot (10^{m-1} - 1) + \cdots + a_1 \cdot (10^1 - 1).$$

Da q nach Vor. durch 3 (9) teilbar ist und die Zahlen $10^m - 1$, $10^{m-1} - 1, \ldots,$ $10^1 - 1$ alle durch 3 (9) teilbar sind, folgt mit den Sätzen 1/2 die Behauptung.
Sei umgekehrt vorausgesetzt, daß z durch 3 (9) teilbar ist. Dann ist wegen der Sätze 1/2 und der gerade angestellten Überlegungen auch

$$q = z - [a_m \cdot (10^m - 1) + a_{m-1} \cdot (10^{m-1} - 1) + \cdots + a_1 \cdot (10^1 - 1)]$$

durch 3 (9) teilbar.

Mit den Quersummenregeln verwandt ist die **Wechselsummenregel** zur Teilbarkeit durch 11. Unter der Wechselsumme der Zahl z (auch „alternierende Quersumme" genannt) versteht man dabei den Ausdruck

$$w = a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_m - (a_1 + a_3 + \cdots + a_{m-1}),$$

falls m gerade, bzw.

$$w = a_0 + a_2 + \cdots + a_{m-1} - (a_1 + a_3 + \cdots + a_m),$$

falls m ungerade ist.

Regel 3: Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn der Betrag ihrer Wechselsumme durch 11 teilbar ist.
Beweis: Es soll hier nur die Beweisidee an dem Spezialfall einer 6-stelligen Zahl mit nichtnegativer Wechselsumme vorgeführt werden. Sei also

$$z = 100000a_5 + 10000a_4 + 1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0$$

und sei zuerst vorausgesetzt, daß die nichtnegative Wechselsumme

$$w = a_0 + a_2 + a_4 - (a_1 + a_3 + a_5)$$

durch 11 teilbar ist. Nun ist

$$z = w + 11a_1 + 99a_2 + 1001a_3 + 9999a_4 + 100001a_5.$$

Da die Zahlen 11, 99, 1001, 9999, 100001 und auch die Wechselsumme w alle durch 11 teilbar sind, folgt mit den Sätzen 1/2, daß z selbst durch 11 teilbar ist.
Sei umgekehrt vorausgesetzt, daß im betrachteten Spezialfall die Zahl z durch 11 teilbar ist. Wegen der Sätze 1/2 und der eben angestellten Überlegungen muß dann auch

$$w = z - (11a_1 + 99a_2 + 1001a_3 + 9999a_4 + 100001a_5)$$

durch 11 teilbar sein.

Das Konzept der Quersumme bzw. Wechselsumme läßt sich noch verallgemeinern, und so lassen sich auch Teilbarkeitsregeln für 7 und 13 entwickeln. Es gilt:
Eine Zahl im dekadischen System ist genau dann durch 7 bzw. 13 teilbar, wenn der Betrag ihrer alternierenden Quersumme 3. Stufe (Wechselsumme 3. Stufe) durch 7 bzw. 13 teilbar ist.
Die altern. Quersumme 3. Stufe kommt dadurch zustande, daß man die Ziffernfolge nach links (!) mit Nullen solange auffüllt, bis die Anzahl der Ziffern ein Vielfaches von 3 ist und dann die alternierende Summe der 3-stelligen Teilzahlen bildet. Die altern. Quers. 3. Stufe von 3458900745 = 003458900745 ist beispielsweise: 3 + 900 - 458 - 745 = -300. Die Zahl ist also weder durch 7 noch durch 13 teilbar.

2.4 Teilbarkeitsregeln bei nichtdekadischen Zahldarstellungen

Wir gehen aus von der Darstellung einer natürlichen Zahl z in der Form:

$$z = a_m \cdot g^m + a_{m-1} \cdot g^{m-1} + \cdots + a_1 \cdot g^1 + a_0$$

mit der natürlichen „Basis“ $g \geq 2$ und den „Ziffern“ $a_0, \ldots, a_m$ mit $0 \leq a_0, a_1, \ldots, a_m \leq g - 1$.

Die **Endziffernregel** lautet allgemein so:
Es gelte a/g. Dann ist z genau dann durch a^n teilbar ($n \in \mathbb{N}$), wenn die aus den letzten n Ziffern von z gebildete Zahl $z_n = a_{n-1} \cdot g^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot g^1 + a_0$ durch a^n teilbar ist.
Der Beweis ist identisch dem von Regel 1, wenn man 10 durch g und 2 (bzw. 5) durch a ersetzt.

Auch die **Quersummenregel** läßt sich sofort verallgemeinern:
Sei a ein Teiler von $g - 1$ (das beinhaltet auch den Fall $a = g - 1$). z ist genau dann durch a teilbar, wenn die Quersumme $a_0 + a_1 + \cdots + a_m$ durch a teilbar ist.
Der Beweis läßt sich wieder wörtlich aus dem dekadischen Fall (Regel 2) übertragen, wenn man zusätzlich berücksichtigt, daß $g - 1$ stets ein Teiler von $g^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$) sein muß, was wiederum aus der allgemeinen Beziehung

$$(g^n - 1) : (g - 1) = 1 + g + g^2 + \cdots + g^{n-1}$$

folgt.

Auch die Wechselsummenregel läßt sich auf Teilbarkeit durch $g + 1$ (bzw. Teiler davon) verallgemeinern.

3 Primzahlen

Zur Erinnerung: Eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist, heißt Primzahl, wenn sie nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist.

3.1 Es gibt unendlich viele Primzahlen

Dieses grundlegende Theorem wurde bereits wie folgt in den „Elementen“ von Euklid (ca. 300 v.C.) bewiesen:
Wir nehmen an, daß die Behauptung falsch ist und führen die Annahme nur endlich vieler Primzahlen zu einem Widerspruch.
Es gebe also nur die Primzahlen $p_1, \ldots, p_s$. Dann ist die Zahl $a = p_1 \cdot p_2 \cdots p_s + 1$ größer als jede dieser endlich vielen Primzahlen und kann folglich selbst keine Primzahl sein. Es muß dann einen Teiler p von a geben, der eine Primzahl und damit gleich einer der Zahlen $p_1, \ldots, p_s$ ist. Dann ist aber:

$$\frac{a}{p} = \text{Produkt von Primzahlen } + \frac{1}{p} \notin \mathbb{N},$$

also ist p doch kein Teiler von a. Da p nicht gleichzeitig Teiler und doch nicht Teiler von a sein kann, muß die Annahme falsch sein, es gibt also unendlich viele Primzahlen.

3.2 Das Sieb des Erathostenes

Schreiben Sie die Zahlen von 1 bis 100 in Reihen 1 bis 10, 11 bis 20, etc. nieder. Streichen Sie nun die 1 und alle Vielfache von 2 außer 2 selbst. Streichen Sie dann alle Vielfache von 3 (außer 3), von 5 (außer 5) und von 7 (außer 7). Warum sind jetzt bereits alle zusammengesetzten Zahlen bis 100 gestrichen und nur mehr die Primzahlen übrig? Dieses einfache Verfahren zum „Aussieben“ von Primzahlen ist nach dem griechischen Philosophen Erathostenes (Vorsteher der Bibliothek in Alexandria, ca. 276–194 v.C.) benannt.
Haben Sie die Frage beantworten können? Hier die (gar nicht so einfache) Lösung: Wenn eine nat. Zahl a den Teiler d hat, so ist auch $d' = \frac{a}{d}$ ein Teiler (der sogen. „Komplementärteiler zu d“)von a. Einer von diesen beiden Teilern d oder d' muß nun $\leq \sqrt{a}$ sein. Denn aus der Annahme $d > \sqrt{a}$ **und** $d' > \sqrt{a}$ würde folgen: $a = dd' > a$, was natürlich Unfug ist. Will man also sämtliche Teiler einer Zahl a bestimmen, so genügt es diejenigen herauszufinden, die

$\leq \sqrt{a}$ sind; die restlichen erhält man durch Division als Komplementärteiler. Es ist dann auch klar, daß eine Zahl z eine Primzahl ist, wenn sie keinen Primteiler hat, der $\leq \sqrt{z}$ ist. Wenn nun z eine Zahl ist, die nach dem obigen Verfahren nicht gestrichen worden ist, so ist z kein Vielfaches einer Primzahl, die ≤ 10 ist, oder umgekehrt, dann hat z keinen Primteiler, der ≤ 10 ist. Da aber wegen $z \leq 100$ auch $\sqrt{z} \leq 10$ sein muß, hat folglich z keinen Primteiler, der $\leq \sqrt{z}$ ist, z muß also eine Primzahl sein.

3.3 Primfaktorzerlegung

Für einen großen Teil der elementaren Zahlentheorie ist der Satz über die eindeutige Primfaktorzerlegung von fundamentaler Bedeutung. Der Beweis dieses Satzes ist etwas kompliziert, sodaß wir uns hier auf die Formulierung und die Diskussion von Beispielen beschränken.

Satz: Zu jeder natürlichen Zahl z, die größer als 1 ist, gibt es eindeutig bestimmte Primzahlen $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ und eindeutig bestimmte, natürliche Exponenten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, sodaß

$$z = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}.$$

Beispiele: $z = 2$; dann ist $n = 1$, $p_1 = 2$ und $\alpha_1 = 1$.
$z = 50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$; dann ist $n = 2$, $p_1 = 2$, $p_2 = 5$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$.
$z = 46080 = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5$; dann ist $n = 3$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$.

4 ggT und kgV

Wichtige Anwendungen des Satzes über die Primfaktorzerlegung ergeben sich bei der Behandlung des größten gemeinsamen Teilers und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen.

4.1 Bestimmung des ggT und kgV

4.1.1 Über Primfaktorzerlegung

ggT
Die gemeinsamen Teiler zweier Zahlen lassen sich natürlich aus den gemeinsamen Primteilern dieser beiden Zahlen zusammensetzen. Zur Bestimmung des ggT zweier Zahlen a und b ist es folglich hinreichend, nach „maximalen“ gemeinsamen Anteilen in den Primfaktorzerlegungen von a und b zu suchen.

Beispiel 1: $48 = 2^4 \cdot 3$; $36 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Das in beiden Zahlen „steckende“ maximale Produkt von Primzahen ist $2^2 \cdot 3 = 12$. Also: $\mathrm{ggT}(48, 60) = 12$.
Beispiel 2: Wir wollen den $\mathrm{ggT}(48, 60, 100)$ bestimmen. Dazu müssen wir zu den bereits durchgeführten Primfaktorzerlegungen noch die für $100 = 2^2 \cdot 5^2$ berücksichtigen. Das in allen 3 Zahlen steckende maximale Produkt ist jetzt $2^2 = 4$.

kgV
Die Bestimmung des kgV zweier Zahlen a und b soll an dem Beispiel

$$a = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 11^4, \quad b = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^3 \cdot 11^2$$

vorgestellt werden. Das kleinste gemeiname Vielfache v dieser beiden Zahlen muß ein ganzzahlige Vielfaches sowohl von a als auch von b sein, genauer: $v = m \cdot a$ bzw. $v = n \cdot b$ mit **minimalem** $m \in \mathbb{N}$ bzw. $n \in \mathbb{N}$. Wegen $v = ma = nb$ ist

$$m = \frac{nb}{a} = \frac{n \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 7^3 \cdot 11^2}{2^3 \cdot 5^2 \cdot 11^4}.$$

Weil m ganzzahlig sein muß, muß der Nenner des Bruches herausgekürzt werden können, n muß also **mindestens** aus allen Primzahlpotenzen bestehen, die in a zusätzlich zu denen aus b vorkommen, also

$$n_{\min} = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2$$

und daher

$$v = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 7^3 \cdot 11^2 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11^4.$$

Aus dem Beispiel ist das folgende Prinzip zur Bestimmung des kgV zweier Zahlen a und b ersichtlich:
— Ermittle die Primfaktorzerlegungen von a und b
— Multipliziere die Primzahlpotenzen, die jeweils mit dem größeren Exponenten in einer der beiden Zerlegungen vorkommen.

4.1.2 Bestimmung des ggT mit dem Euklidischen Algorithmus

In Fällen großer Zahlen sind ggT und kgV nur sehr schwerfällig mit Hilfe der Primfaktorzerlegungen zu bestimmen. Glücklicherweise gibt es noch ein anderes Verfahren, wie das ggT (und mit dessen Hilfe auch das kgV) ermittelt werden kann. Wir führen dieses Verfahren am Beispiel der beiden Zahlen 53667 und 25527 vor:

$$\begin{array}{rcrcccr} 53667 & : & 25527 & = & 2 & \mathrm{R} & 2613 \\ 25527 & : & 2613 & = & 9 & \mathrm{R} & 2010 \\ 2613 & : & 2010 & = & 1 & \mathrm{R} & 603 \\ 2010 & : & 603 & = & 3 & \mathrm{R} & 201 \\ 603 & : & 201 & = & 3 & \mathrm{R} & 0. \end{array}$$

Tatsächlich ist ggT(53667, 25527) = 201.
Unter einem Algorithmus versteht man eine endliche Folge von genau beschriebenen Rechenanweisungen (man könnte auch sagen ein „Programm"), deren Abarbeitung in hinreichend allgemeinen Fällen ein bestimmtes Ergebnis erzielen. Beim Euklidischen Algorithmus lautet das „Programm" für die Bestimmung von $v := \mathrm{ggT}(a, b)$ mit $a > b$ (!!) so:
„Anfang": Führe die Division $a : b$ mit Rest durch.
Falls Rest = 0, so setze $v = b$ und du bist fertig. Ansonsten ersetze a durch b und b durch den Rest und gehe zurück zum „Anfang".
Spätestens dann, wenn $b = 1$, ist Schluß mit dem Zurückgehen zum „Anfang", sodaß der Algorithmus nach endlich vielen Schritten „abgearbeitet" ist.

Daß der Algorithmus wirklich den ggT liefert, dürfte (hoffentlich) für den Fall klar sein, daß bereits die allererste Division aufgeht. Wir wollen zwar auf den Beweis für den allgemeinen Fall verzichten, jedoch noch denjenigen Fall betrachten, in dem in zwei Schritten (also mit einmaligem Rückgehen zum „Anfang") das Ergebnis erzielt wird.
Es ist dann

$$a = nb + r \quad (1 \leq r < b), \quad \text{d.h. } a : b = n \;\; R \;\; r$$

$$b = mr + 0 \quad (m, n, r \in \mathbb{N}), \quad \text{d.h. } a : r = m \;\; R \;\; 0.$$

Nun ist aber aufgrund der allgemeinen Teilbarkeitsregeln eine nat. Zahl d genau dann ein gemeinsamer Teiler von a und von b, wenn d ein gemeinsamer Teiler von $a - nb$ und von b ist. Es ist folglich

$$\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a - nb, b) = \mathrm{ggT}(r, b) = r.$$

4.1.3 Zusammenhang zwischen ggT und kgV

Ist nun der $\mathrm{ggT}(a, b)$ über den Euklidischen Algorithmus bestimmt, so kann für das $\mathrm{kgV}(a, b)$ folgende **Regel** angewandt werden:

$$\mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{kgV}(a, b) = a \cdot b.$$

Beweis: Die Primfaktorzerlegung von a sei

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} \cdot q_1^{\beta_1} \cdots q_n^{\beta_n}$$

und die von b sei

$$b = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} \cdot r_1^{\gamma_1} \cdots r_m^{\gamma_m},$$

wobei das Produkt

$$p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$$

den a und b gemeinsamen Primfaktoren entspricht. Nach den Regeln über die Gewinnung des ggT und des kgV aus den Primfaktorzerlegungen folgt:

$$\mathrm{ggT}(a,b) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s},$$

$$\mathrm{kgV}(a,b) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} \cdot q_1^{\beta_1} \cdots q_n^{\beta_n} \cdot r_1^{\gamma_1} \cdots r_m^{\gamma_m}.$$

Multipliziert man nun den ggT und das kgV in diesen beiden Dartsellungen, so folgt sofort die Behauptung.

Die obige Regel gilt nur für ggT und kgV aus zwei Zahlen. Allerdings läßt sich der Euklidische Algorithmus auch nur auf den ggT **zweier** Zahlen anwenden. Hat man etwa den ggT der 3 Zahlen a, b und c zu bestimmen, so müßte man den Euklidischen Algorithmus zweimal anwenden: Zum ersten um $t = \mathrm{ggT}(a,b)$ zu errechnen, zum zweiten um $\mathrm{ggT}(a,b,c) = \mathrm{ggT}(t,c)$ zu bestimmen. Ebenso läßt sich die Bestimmung des kgV schrittweise nach der Regel

$$\mathrm{kgV}(a,b,c) = \mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(a,b),c)$$

durchführen.

5 Staatsexamensaufgaben HS

99 II, 2, 1:
Beschreiben und erklären Sie die Darstellung natürlicher Zahlen im dekadischen Stellenwertsystem.

97 I, 1,1+2+4:
1a.) Erläutern Sie den Begriff Stellenwertsystem.
b.) Berechnen Sie im Stellenwertsystem mit der Basis 5:
$4031_5 + 3432_5$, $30024_5 - 331_5$, $442_5 - 42_5$.
2a.) Geben Sie eine Übersicht über Teilbarkeitsregeln, die sich auf die Darstellung der natürlichen Zahlen im Zehnersystem beziehen. Klassifizieren Sie

diese Regeln.
b.) Begründen Sie im Dezimalsystem die Regel für die Teilbarkeit durch 4.
4.) Beschreiben Sie Möglichkeiten zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen und erläutern Sie diese anhand von Beispielen.

96 I, 2, 1+4:
1a.) Nennen Sie wichtge Teilbarkeitsregeln, die sich auf die Darstellung der natürlichen Zahlen im Zehnersystem beziehen und klassifizieren Sie diese.
b.) Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen a, b:„Wenn p Teiler von a, und p Teiler von b ist, dann ist p auch Teiler von $a + b$.“
c.) Gilt auch die Umkehrung?
4a.) Erläutern Sie, wie man mit Hilfe der Primfaktorzerlegung den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache zweier natürlicher Zahlen finden kann.
b.) Zeigen Sie, daß folgender Satz gilt: „Das Produkt zweier beliebiger Zahlen ist genauso groß wie das Produkt aus dem größten gemeinsamen Teiler und dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen dieser Zahlen.“

96 II, 1, 1+3a:
1.) Erläutern Sie die Dastellung natürlicher Zahlen im Stellenwertsystem.
3a.) Beschreiben und begründen Sie an einem Beispiel das Normalverfahren der schriftlichen Division.

94 I, 1a:
Erläutern Sie die Systemdarstellung der natürlichen Zahlen für die Basen 10 und 2.

93, I, 1, 1+4:
1.) Die Teilbarkeit natürlicher Zahlen durch 3 und durch 9 kann man mit den Quersummenregeln überprüfen. Erläutern und begründen Sie diese Regeln. Gehen Sie dabei besonders darauf ein, inwiefern diese Regeln auf das dekadische Stellenwertsystem bezogen sind. Welche Sätze über die Teilbarkeit natürlicher Zahlen sind zum Beweis erforderlich?
4.) Formulieren und beweisen Sie allgemein eine Quersummenregel für g-adische Stellenwertsysteme ($g > 2$).

93 II, 3, 2:
Beschreiben und begründen Sie an einem Beispiel das Verfahren der schriftlichen Multiplikation.

92 II, 1, 1+4:
1a.) Beschreiben Sie, wie man mit dem „Sieb des Erathostenes“ alle Primzahlen bis $n = 100$ bestimmen kann. Nennen Sie diese.
b.) Begründen Sie das Verfahren. Zeigen Sie, daß man es abbrechen kann, sobald man zu einer Primzahl gelangt ist, deren Quadrat größer als n ist.
4.) Zeigen Sie, wie man für natürliche Zahlen a und b mit Hilfe ihrer Primfaktorzerlegung $\mathrm{kgV}(a, b)$ und $\mathrm{ggT}(a, b)$ bestimmen kann.

91 I, 1+2+5:
1a.) Erläutern Sie den Begriff Teilbarkeit im Bereich der natürlichen Zahlen.
b.) Erläutern Sie — auch anhand geeigneter Beispiele — Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation.
2.) Begründen Sie Regeln zur Teilbarkeit im Dezimalsystem.
5.) Formulieren und begründen Sie ein Kriterium für die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl durch 24.