Volumenberechnung

Allgemein:
Zerlegt man einen Körper in Teilkörper, so ist sein Volumen gleich der Summe der Volumina der Teilkörper.

Volumen des Quaders

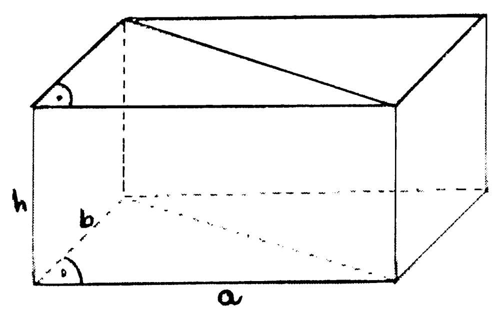
Das Volumen des Quaders errechnet sich als Produkt seiner Kantenlängen. Beweis in zwei Schritten:
1.) Die drei Kantenlängen a, b, c sind rationale Vielfache von 1 m, nämlich $a = r/s$ m, $b = t/u$ m und $c = v/w$ m. Dann ist der Quader die disjunkte Vereinigung von insgesamt $(ruw)(tsw)(vsu)$ Würfeln der Seitenlänge $1/suw$ m. 1 m^3 faßt $(suw)^3$ dieser Würfel, also hat jeder dieser Würfel das Volumen $1/(suw)^3\mathrm{m}^3$. Insgesamt ergibt sich für das Volumen V des Quaders:

$$V = \frac{ruw \cdot tsw \cdot vsu}{(suw)^3}\mathrm{m}^3 = \frac{rtv}{suw}\mathrm{m}^3 = abc.$$

2.) Mindestens eine der drei Kantenlängen ist ein irrationales Vielfaches von 1 m. Auf jeden Fall lassen sich die Kantenlängen a, b, c in Intervallschachtelungen $[a_n; a'_n]$, $[b_n; b'_n]$, $[c_n; c'_n]$ mit rationalen Grenzen einschließen. Wegen 1.) haben die Quader mit den Seitenlängen a_n, b_n, c_n bzw. a'_n, b'_n, c'_n die Volumina $a_n b_n c_n$ bzw. $a'_n b'_n c'_n$. Das Volumen V des vorliegenden Quaders liegt mithin zwischen $a_n b_n c_n$ und $a'_n b'_n c'_n$. Letztere Terme entsprechen der Intervallschachtelung für abc, woraus die Behauptung folgt.

Volumen des geraden Prismas

1. **Spezialfall: Rechtwinkliges Dreieck als Grundfläche**



Quadervolumen: abh; Prismenvolumen $1/2abh = Gh$.

   Prisma kann als halber Quader aufgefasst werden.
   $V = 1/2 \cdot a \cdot b \cdot h$ oder $V = G \cdot h$.

2. **Jedes dreiseitige Prisma lässt sich in zwei Prismen mit rechtwinklig-dreieckiger Grundfläche zerlegen**

3. **Jedes Prisma lässt sich in dreiseitige Prismen zerlegen**
   Ist ein gerades Pisma in n dreiseitige Prismen zerlegt, so gilt:
   $V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n = G_1 h + G_2 h + \ldots + G_n h = (G_1 + G_2 + \ldots + G_n)h = Gh$, also:
   $V_{Prisma} = Gh$

4. **Schiefe Prismen**
   Hier gilt ebenfalls die Formel $V = Gh$ (Beweis mit Cavalierischem Prinzip oder durch Ergänzen auf gerades Prisma). Dabei ist h der Abstand der Ebenen, in denen Grund- und Deckfläche liegen.

Unmöglichkeit der Rückführung des Pyramidenvolumens auf das Quadervolumen

Durch Zerlegen bzw. Ergänzen kann man nur Volumina von Prismen auf das Quadervolumen zurückführen. Bei Pyramiden (und noch komplizierteren Körpern) gelingt dies im allgemeinen nicht mehr. Eine solche Unmöglichkeit wurde bereits von Euklid vermutet und von Max Dehn 1902 bewiesen. Zur Herleitung von Pyramidenvolumen und der Volumina von Drehkörpern benötigt man infinitesimale Methoden. Besonders „elementar“ ist die Methode, sich des Cavalierischen Prinzips zu bedienen.

Cavalierisches Prinzip

Stehen zwei Körper auf derselben Ebene E und erzeugt jede zu E parallele Ebene bei beiden Körpern gleich große Schnittflächen, dann haben beide Körper dasselbe Volumen.

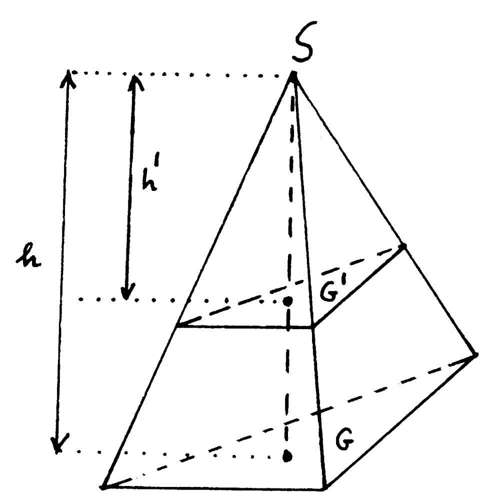
Beweisidee:

- Zwei Körper mit gleich großen Grundflächen und Höhen stehen auf einer Ebene E.
- Von Ebenen, die parallel zu E sind, werden sie in Scheiben der Dicke d geschnitten.
- Die Scheiben sind annähernde Prismen mit paarweise gleich großen Grundflächen und Höhen.
- Sehr dünne Scheiben in gleicher Höhen haben ungefähr dasselbe Volumen.
- Wenn zwei Körper aus paarweise volumengleichen Scheiben bestehen, dann haben sie dasselbe Volumen.

1. **Die Berechnung des Pyramidenvolumens nach dem Satz des CAVALIERI**

   Untersuchung der Schnittflächen, die entstehen, wenn man eine Pyramide parallel zur Grundfläche schneidet.

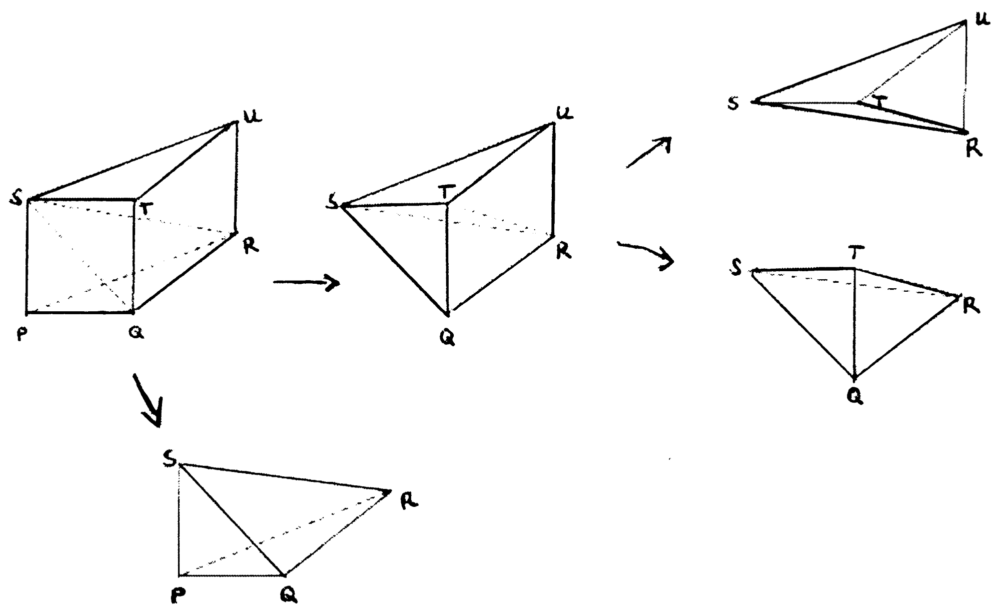
   Für sie gilt:
   Die Inhalte paralleler Schnittflächen einer Pyramide verhalten sich wie die Quadrate der Abstände der Flächen von der Spitze.



Beweis:
G' entsteht aus G bei zentrischer Streckung mit dem Zentrum S und dem Streckungsfaktor $m = h'/h$, also gilt:
$G' = m^2 G$ oder $G'/G = m^2 = h'^2/h^2$
$\Longrightarrow$ zwei Pyramiden mit gleich großen Grundflächen und gleichen Höhen haben in jeder Höhe gleich große Schnittflächen.

Nach CAVALIERI:
Pyramiden mit gleich großen Grundflächen und gleichen Höhen haben dasselbe Volumen.

Vom Prismen- zum Pyramidenvolumen



In Anlehnung an Barth et.al., Anschauliche Geometrie, Bd. 3, S. 145, München 1988

- Ausgangspunkt: gerades dreiseitiges Prisma $PQRSTU$
- Dieses zerschneidet man in die dreiseitige Pyramide $PQRS$ und in die vierseitige Pyramide $QRUTS$.
- Nun halbiert man die vierseitige Pyramide und es entstehen zwei volumengleiche dreiseitige Pyramiden $RUTS$ und $QRTS$.
- Es gilt auch $\text{Vol}(PQRS) = \text{Vol}(RUTS)$.
- Für die spezielle Pyramide $PQRS$ gilt: $V = 1/3G \cdot h$.
  Jede andere Pyramide mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe hat dasselbe Volumen, also gilt sogar allgemein:
  $$V_{Pyramide} = 1/3Gh$$

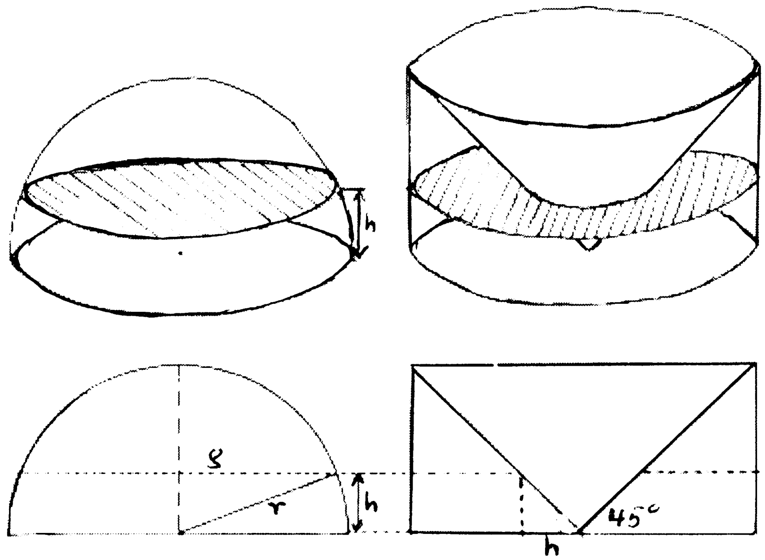
2. **Volumen von Zylinder und Kegel nach dem Satz des CAVALIERI**

Alternativ:

- Vergleich des Zylinders mit einem Quader derselben Grundfläche und Höhe bzw. des Kegels mit einer Pyramide derselben Grundfläche und Höhe.

- Zylinder als gerades Prisma mit “unendlich” vielen Ecken, Kegel als Pyramide mit einer Grundfläche von “unendlich” vielen Ecken.

3. **Volumen der Kugel nach dem Satz des CAVALIERI**



(In Anlehnung an Barth et. al., Anschauliche Geometrie 4, S. 68, München 1989.)

- Ausgangssituation: Vergleich einer Halbkugel (Radius r) mit einem kegelförmig ausgebohrten Zylinder (Radius r, Höhe r)
- Beide Körper werden nebeneinander gestellt und man schneidet sie in gleicher Höhe h mit einer Ebene parallel zu den Grundflächen.
- Bei der Halbkugel ergibt sich als Schnittfigur ein Kreis (Radius ρ) vom Inhalt $\rho^2\pi = (r^2 - h^2)\pi$ und beim ausgebohrten Zylinder ein konzentrischer Kreisring (Radien r und h vom Inhalt $r^2\pi - h^2\pi$.
- Die beiden Schnittfiguren sind in jeder Höhe flächengleich.
- nach C.P. haben Halbkugel und ausgebohrter Zylinder denselben Rauminhalt.

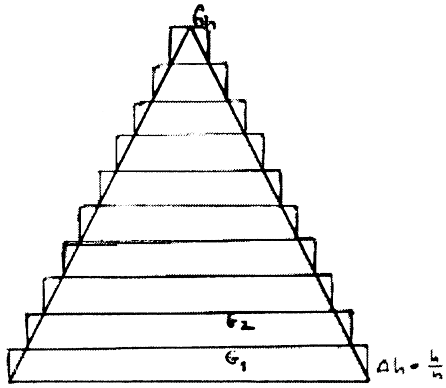
$V_{Halbkugel} = V_{Zylinder} - V_{Kegel}$
$1/2V_{Kugel} = r^2\pi \cdot r - 1/3r^2\pi \cdot r = 2/3r^3\pi$

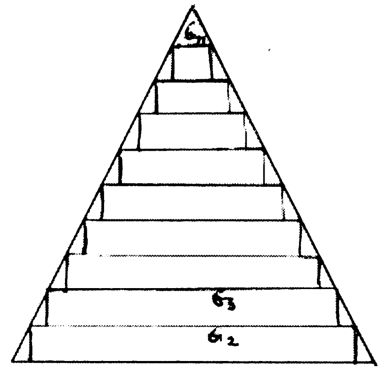
$$V_{Kugel} = 4/3r^3\pi$$

Eine weitere infinitesimale Methode, die zur Volumenbestmmung dient, ist die

Scheiberlmethode

Sie soll im folgenden für das Pyramidenvolumen vorgeführt werden.





$$G_1\Delta h + G_2\Delta h + \ldots + G_n\Delta h > V_{Pyr} > G_2\Delta h + G_3\Delta h + \ldots + G_n\Delta h$$

Die linke Seite entspricht dem Volumen des äußeren Stufenkörpers, die rechte Seite dem des inneren Stufenkörpers.
Differenz: $G_1\Delta h \to 0 \quad (n \to \infty)$. Die Volumina des inneren und äußeren Stufenkörpers bilden eine Intervallschachtelung für das Pyramidenvolumen, sodaß

$$V_{Pyr} = \lim_{n\to\infty} V_{außen} = \lim_{n\to\infty} V_{innen}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} V_{außen} &= \Delta h(G_1 + G_2 + \ldots + G_n) \\ \frac{G_2}{G_1} &= \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \text{ mit } h_1 = h, \quad h_2 = h - \frac{h}{n} \end{aligned}$$

h_1 ist der Abstand von G_1 zur Pyramidenspitze, h_2 der Abstand von G_2 zur Pyramidenspitze.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \frac{G_2}{G_1} &= \left(\frac{h-\frac{h}{n}}{h}\right)^2 = \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{(n-1)^2}{n^2} \\ \text{ebenso:} & \\ \frac{G_3}{G_1} &= \left(1-\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{(n-2)^2}{n^2}; \qquad \ldots \\ \frac{G_n}{G_1} &= \left(1-\frac{(n-1)}{n}\right)^2 = \frac{1^2}{n^2} \\ \Longrightarrow V_{außen} &= \Delta h\left(G_1 + \frac{(n-1)^2}{n^2}\cdot G_1 + \frac{(n-2)^2}{n^2}\cdot G_1 + \ldots + \frac{1^2}{n^2}\cdot G_1\right) \\ &= \Delta h \cdot G_1 + \frac{\Delta h}{n^2}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right)\cdot G_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2 \\ &= \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6} - n^2 \\ &= \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n - 6n^2}{6} \\ &= \frac{2n^3 - 3n^3 + n}{6} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow V_{außen} &= \Delta h \cdot G_1 + \frac{\Delta h}{n^2} \cdot \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} \cdot G_1; \qquad \Delta h = \frac{h}{n} \\
V_{außen} &= \frac{h}{n} \cdot G_1 + \frac{h}{n^3} \cdot \frac{2n^3 - 3n^2 + n| : n^3}{6| : n^3} \cdot G_1 \\
&= \frac{h}{n} \cdot G_1 + \frac{h}{6} \cdot (2 - 3/n + 1/n^2) \cdot G_1
\end{aligned}
$$

Bei $n \to \infty$ streben h/n, $3/n$ und $1/n^2$ gegen 0, also gilt für $n \to \infty$: $V_{außen} \to \frac{2h}{6} \cdot G_1 = \frac{1}{3} G_1 \cdot h = V_{Pyr}$.