Lehrplan Mathematik JGS 5

4–stündig

Der Mathematikunterricht des ersten Jahrs am Gymnasium knüpft an die Inhalte und Methoden der Grundschule an, er vertieft, systematisiert und erweitert die dort erworbenen Kenntnisse und Fähigkeiten. Natürliche Neugier, Wissbegierde und hohe Leistungsbereitschaft der Kinder werden durch die Vielfalt an Themen und durch einen spielerischen, entdeckenden Zugang aufgegriffen. Durch den Anwendungsbezug der betrachteten Fragestellungen wird den Kindern deutlich, dass Mathematik überall in ihrem Alltag vorkommt. Insbesondere bei der handlungsorientierten Erarbeitung von Zusammenhängen in der Geometrie wird die Freude der Kinder am kreativen Tun gestärkt. Darüber hinaus wird ihnen bewusst, wie wichtig eine sorgfältige und genaue Arbeitsweise ist. Während des gesamten Schuljahrs beschäftigen sich die Schüler intensiv mit Zahlen und entwickeln dabei ein Gefühl für Größenordnungen; sie erweitern und vertiefen ihr Wissen über Größen und über grundlegende Elemente der Geometrie. Daneben üben sie, einfache Zusammenhänge in eigenen Worten sowie mit geometrischen oder arithmetischen Fachbegriffen auszudrücken. Ausgehend von ihnen bereits aus dem Alltag bekannten Beispielen für negative Zahlen lernen die Kinder auf altersgemäße, anschauliche Weise die Menge der ganzen Zahlen kennen. Nach und nach gewinnen sie Sicherheit im Umgang mit ihnen und erwerben so die Grundlagen für ein kumulatives Weiterentwickeln und Vertiefen der Arithmetik in den folgenden Schuljahren.

In der Jahrgangsstufe 5 erwerben die Schüler folgendes Grundwissen:

- Sie können mit ganzen Zahlen in den Grundrechenarten rechnen, Größenordnungen erkennen und abschätzen.
- Sie erkennen die Struktur einfacher Terme.
- Sie können Winkel und Grundfiguren (auch im Koordinatensystem) mit Hilfe des Geodreiecks zeichnen.
- Sie sind in der Lage, Eigenschaften geometrischer Figuren und Körper zu erkennen und zu beschreiben.
- Sie gehen sicher mit im Alltag verwendeten Größen (insbesondere Geld, Länge, Masse, Zeit) um, z.T. auch in Kommaschreibweise.
- Sie können die Grundlagen der Flächenmessung anwenden.
- Sie finden Lösungswege bei Sachaufgaben und können ihr Vorgehen beschreiben.

M 5.1 Weiterentwicklung der Zahlvorstellung

Die Schüler kennen Zahlen aus dem täglichen Leben. Bereits beim Vertiefen ihrer Vorkenntnisse sollen sie ein Gefühl für Zahlen entwickeln, sodass sie Größenordnungen intuitiv erkennen und mit Zahlen im Alltag flexibel umgehen können. Die Kinder entdecken nach und nach unterschiedliche Eigenschaften von Zahlen und üben sich im Kopfrechnen. Ihre durch die natürlichen Zahlen geprägte Zahlvorstellung entwickelt sich beim Übergang zur Menge der ganzen Zahlen weiter.

M 5.1.1 Die natürlichen Zahlen (ca. 9 Std.)

In der Grundschule wurden zum Abzählen und Rechnen natürliche Zahlen bis zu einer Million verwendet. Daran anknüpfend lernen die Schüler nun auch größere natürliche Zahlen kennen und verstehen, dass die Menge der natürlichen Zahlen kein größtes Element besitzt. Sie veranschaulichen Anzahlen, runden sie und [[lernen das kulturhistorisch bedeutsame Zahlensystem der Römer [→ L1 5.1] als Beispiel für ein System kennen, das kein Stellenwertsystem ist.]] vertiefen am Beispiel des Zehnersystems ihre Grundschulkenntnisse zum Stellenwertsystem.

- die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen und ihre Veranschaulichung am Zahlenstrahl
- Veranschaulichen von Anzahlen durch Diagramme [→ NT 5.1.1, Geo 5.6]
- das Zehnersystem als Stellenwertsystem [[Ausblick auf das römische Zahlensystem]]

M 5.1.2 Addition und Subtraktion natürlicher Zahlen (ca. 6 Std.)

Die Kinder systematisieren und vertiefen ihre Vorkenntnisse. Sie lernen, ihr Ergebnis durch Abschätzen der Größenordnung kritisch zu überprüfen, und üben sich im Kopfrechnen.

- Summe und Differenz natürlicher Zahlen
- Rechenvorteile durch Anwenden von Rechengesetzen
- Gliedern einfacher Terme und Berechnen ihres Werts

M 5.1.3 Die ganzen Zahlen, ihre Addition und Subtraktion (ca. 11 Std.)

Ausgehend von Alltagserfahrungen, etwa im Zusammenhang mit Temperaturangaben, lernen die Schüler Beispiele für negative Zahlen und damit die Menge der ganzen Zahlen kennen. Über die Veranschaulichung an der Zahlengeraden und das Arbeiten mit anschaulichen Modellen werden sie mit den neuen Zahlen vertraut und lernen, diese zu addieren und zu subtrahieren.

- die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen und ihre Veranschaulichung an der Zahlengeraden (insbesondere: Zahl und Gegenzahl, Größenvergleich, die Sonderrolle der Null)
- Berechnen von Summen- und Differenzwerten, Rechenregeln
- Berechnen der Werte einfacher Terme (auch mit Klammern)

M 5.2 Weiterentwicklung geometrischer Grundvorstellungen (ca. 17 Std.)

Die Grundschulkenntnisse über geometrische Grundfiguren und Körper werden erweitert und vertieft. Zugang zu diesem Gebiet der Mathematik finden die Schüler durch eigene Aktivitäten, vor allem durch das Anfertigen von Zeichnungen und Modellen. Dabei entwickeln sich ihre Raumvorstellung und ihr Formempfinden weiter. Hierbei bieten sich z.

B. achsensymmetrische Figuren an, wie sie bereits aus der Grundschule bekannt sind. Den Kindern wird bewusst, dass sie geometrische Grundelemente in ihrem Umfeld wiederfinden können, und sie üben, geometrische Sachverhalte in Worten auszudrücken.

- Zeichnen geometrischer Figuren, Bauen einfacher Modelle; Grundbegriffe, Grundfiguren und Körper
- Umgehen mit Geodreieck und Zirkel, u. a. Zeichnen und Messen von Winkeln (bis 360°), Erkennen und Überprüfen rechter Winkel, zueinander parallele bzw. senkrechte Geraden
- Koordinatensystem
- einfache achsensymmetrische Figuren

M 5.3 Rechnen mit ganzen Zahlen

Die Kenntnisse über natürliche Zahlen werden ausgebaut, wobei der Altersstufe entsprechend ein entdeckender Zugang und der Alltagsbezug großes Gewicht haben. Darauf aufbauend lernen die Kinder, ganze Zahlen zu multiplizieren und zu dividieren; sie verbinden die Grundrechenarten und üben weiter das Kopfrechnen. Im Gegensatz zur Beschäftigung mit natürlichen Zahlen, bei der sie sich auch mit systematischen Gesichtspunkten wie Termstrukturen befassen, steht bei ganzen Zahlen ein enger Bezug zur Anschauung im Vordergrund.

M 5.3.1 Multiplikation und Division natürlicher Zahlen (ca. 22 Std.)

Die Schüler lernen die Systematik der Multiplikation und Division kennen; sie festigen ihre Fertigkeiten in den Grundrechenarten und in deren Verbindung. Beim Multiplizieren natürlicher Zahlen lernen sie auch das Zählprinzip kennen. Bei der Beschäftigung mit Termen zerlegen sie komplexere Strukturen in einfache Grundelemente. Anhand von Fragestellungen aus dem Alltag üben sie, die Größenordnung von Ergebnissen kritisch zu überprüfen und den Rechenweg klar und übersichtlich darzustellen.

- Produkt und Quotient natürlicher Zahlen
- Faktorisieren von Zahlen, Primzahlen
- Begriff der Potenz, Darstellen großer Zahlen mithilfe von Zehnerpotenzen
- Rechenvorteile durch Anwenden von Rechengesetzen, ,,Punkt–vor–Strich"–Regel
- Gliedern einfacher Terme (auch mit Klammern) und Berechnen ihrer Werte
- erstes Anwenden des Zählprinzips, Veranschaulichen in Baumdiagrammen

M 5.3.2 Multiplikation und Division ganzer Zahlen (ca. 9 Std.)

An Beispielen erkennen die Schüler die Notwendigkeit, auch Produkte und Quotienten ganzer Zahlen zu berechnen. Durch abwechslungsreiches Üben gewinnen sie nach und nach Sicherheit im Bearbeiten von Aufgaben aus Sachzusammenhängen und im Berechnen von Termwerten.

- Berechnen von Produkt- und Quotientenwerten, Rechenregeln, Überschlagen von Ergebnissen
- Berechnen der Werte einfacher Terme, die mehrere Rechenarten enthalten

M 5.4 Mathematik im Alltag: Größen

Die Verwendung von Größen spielt in vielen Zusammenhängen, in denen die Mathematik den Kindern im Alltag begegnet, eine wesentliche Rolle. Im Unterricht werden diese Vorkenntnisse vertieft und um den Begriff Flächeninhalt erweitert. Bei vielfältigen Anwendungen lernen die Schüler, den mathematischen Kern eines Problems zu erkennen. Sie machen sich klar, dass es oft verschiedene Lösungswege gibt, die unterschiedlich vorteilhaft sein können.

M 5.4.1 Größen und ihre Einheiten (ca. 18 Std.)

Die Kinder kennen bereits wichtige Alltagsgrößen sowie deren Einheiten und wissen, dass diese häufig in Kommaschreibweise dargestellt werden. Sie lernen nun, mit Größen in Sachzusammenhängen sicher umzugehen und damit zu rechnen [→ NT 5.1]. Zumindest bei den Strichrechenarten verwenden sie dabei auch die Kommaschreibweise.

- Darstellung der Größen ,,Geld", ,,Länge", ,,Masse" und ,,Zeit" in verschiedenen Einheiten
- Kommaschreibweise bei den Größen ,,Geld", ,,Länge" und ,,Masse" (soweit in Sachaufgaben sinnvoll)
- Rechnen mit Größen
- Berechnungen zu Umfang und Maßstab [→ Geo 5.6], weitere Anwendungen in Sachaufgaben

M 5.4.2 Fläche und Flächenmessung (ca. 20 Std.)

Über das Zeichnen, Auslegen und Ausschneiden geometrischer Figuren lernen die Schüler den Begriff Flächeninhalt kennen. Sie verstehen, dass zur Flächenmessung Einheiten nötig sind, und erkennen, wie sich diese aus den Längeneinheiten ergeben. Ausgehend vom Flächeninhalt des Rechtecks ermitteln sie auch Flächeninhalte anderer Figuren und Oberflächeninhalte von Körpern. Hierbei wird vor allem der Blick für geometrische Zusammenhänge sowie das flexible Ermitteln von Lösungswegen und deren Beurteilung geübt, erst in zweiter Linie das Anwenden von Formeln. Als abrundende Wiederholung und Vernetzung werden den Kindern dabei bewusst auch Bezüge zu anderen Inhalten dieses Schuljahrs aufgezeigt und grundlegende Arbeitstechniken vertieft.

- Flächenmessung, Flächeneinheiten
- Flächenformel für Rechtecke
- Flächeninhalt von Figuren, die in Rechtecke zerlegt oder zu Rechtecken ergänzt werden können
- Oberflächeninhalt von Quadern und einfachen zusammengesetzten Körpern

Lehrplan Mathematik JGS 6

4–stündig

Der Mathematikunterricht dieser Jahrgangsstufe führt die im Vorjahr behandelten Themenstränge unmittelbar weiter. Dabei werden Neugier und Begeisterungsfähigkeit der Kinder gestärkt, ihr Interesse wird durch variantenreiche Fragestellungen weiter gefördert. Anhand von Problemstellungen aus dem Alltag erfahren die Kinder, dass der bisher verwendete Zahlenbereich der ganzen Zahlen durch Brüche sinnvoll erweitert werden kann. Die bei Größen nützliche Kommaschreibweise, die sie aus Jahrgangsstufe 5 kennen, wird in diesem Zusammenhang neu gedeutet. Die Schüler lernen darüber hinaus, Prozentangaben und Diagramme in Sachzusammenhängen zu interpretieren. Im Lauf des Schuljahrs gewinnen sie zunehmend Sicherheit bei der Verwendung rationaler Zahlen, sodass sie nach einer weiteren Vertiefung in Jahrgangsstufe 7 über ein solides Fundament in Arithmetik verfügen. Daneben sollen die Kinder allmählich auch ihr Geschick beim Mathematisieren und Lösen von Fragen mit Anwendungsbezug weiterentwickeln. Bei der Beschäftigung mit geometrischen Figuren und Körpern erweitern sie ihre Kenntnisse über Flächen- und Rauminhalt und verbessern ihr räumliches Vorstellungsvermögen. Im Zusammenhang mit Diagrammen, Zufallsexperimenten oder anderen Themen, bei denen sich schülerzentrierte Arbeitsformen anbieten, lernen die Kinder ihre selbst erarbeiteten Ergebnisse altersgemäß vor ihren Mitschülern zu präsentieren und werden dazu angeregt, eigenverantwortlich zu arbeiten.

In der Jahrgangsstufe 6 erwerben die Schüler folgendes Grundwissen:

- Sie können rationale Zahlen in verschiedenen Schreibweisen darstellen.
- Sie können Termwerte (in der Menge der rationalen Zahlen) berechnen.
- Sie sind in der Lage, grundlegende Schluss- und Prozentaufgaben mit Alltagsbezug zu lösen.
- Sie können den Flächeninhalt von Dreiecken sowie von daraus zusammengesetzten Figuren berechnen.
- Sie können die Grundlagen der Raummessung anwenden.
- Sie erstellen und interpretieren Diagramme in einfachen Fällen und sind für Möglichkeiten der Manipulation sensibilisiert.
- Sie präsentieren Ergebnisse altersangemessen.

M 6.1 Weiterentwicklung der Zahlvorstellung

Anknüpfend an eigene Erfahrungen erkennen die Schüler, dass sich Bruchteile gut zur Beschreibung alltäglicher Zusammenhänge eignen. Um ein fundiertes Verständnis für den Bruchzahlbegriff zu gewinnen, beschäftigen sie sich mit Brüchen in ihren verschiedenen Schreibweisen und verwenden sie darüber hinaus bei der Auswertung von Zufallsexperimenten.

M 6.1.1 Bruchteile und Bruchzahlen (ca. 13 Std.)

Ausgehend von unterschiedlichen Möglichkeiten, Bruchteile bzw. Anteile zu veranschaulichen, werden die Schüler allmählich mit den damit zusammenhängenden neuen Begriffen und den verschiedenen Schreibweisen vertraut. Darauf aufbauend lernen sie Brüche als Zahlen kennen. Sie stellen auch negative Bruchzahlen an der Zahlengeraden dar und erkennen, dass der Zahlenbereich der rationalen Zahlen den der ganzen Zahlen beinhaltet.

- Bruchteile und ihre Veranschaulichung (auch in Kreisdiagrammen)
- Erweitern und Kürzen
- spezielle Anteile in alternativer Schreibweise als Prozentsätze
- die Menge der rationalen Zahlen, Veranschaulichung von Bruchzahlen auf der Zahlengeraden und Deutung als Quotient

M 6.1.2 Dezimalzahlen (ca. 8 Std.)

Die bereits aus Jahrgangsstufe 5 im Zusammenhang mit Größen vertraute Kommaschreibweise wird jetzt mithilfe von Brüchen erklärt und systematisch ausgebaut. Dabei finden die Schüler Zusammenhänge zwischen der Primfaktorzerlegung des Nenners und der Möglichkeit, den Bruch als endlichen Dezimalbruch darzustellen. Bereits hier können auch unendliche Dezimalbrüche zur Sprache kommen.

- Erweiterung der Stellenwerttafel, Darstellung an der Zahlengeraden
- Umwandeln von endlichen Dezimalbrüchen in Brüche und umgekehrt

M 6.1.3 Relative Häufigkeit (ca. 6 Std.)

Die Schüler beschäftigen sich mit einfachen Zufallsexperimenten und werten Daten aus. Dabei lernen sie die relative Häufigkeit — dargestellt als Bruch, Dezimalzahl oder Prozentsatz — als Mittel zur Bewertung einzelner Ergebnisse und als sinnvollen Schätzwert zur Vorhersage von Gewinnchancen (empirisches Gesetz der großen Zahlen) kennen. [[Fragestellungen, die z. B. mit Hilfe von Vierfeldertafeln beantwortet werden können, machen ihnen deutlich, dass es zweckmäßig ist, mit Brüchen rechnen zu können.]]

- Auswerten von Zufallsexperimenten
- relative Häufigkeit

M 6.2 Rechnen mit nicht–negativen rationalen Zahlen

Nachdem die Schüler sich mit dem Bruchzahlbegriff vertraut gemacht haben, lernen sie, mit positiven Brüchen zu rechnen, und erweitern ihre Kenntnisse dann auf Dezimalzahlen. Dabei üben sie immer wieder, Ergebnisse durch Überschlagsrechnungen abzuschätzen.

M 6.2.1 Addition und Subtraktion (ca. 10 Std.)

Die Regeln für die Strichrechenarten bei positiven Brüchen werden erarbeitet. Dabei lernen die Schüler den Begriff kgV kennen. Für den Spezialfall endlicher Dezimalbrüche gewinnen sie die entsprechenden Rechenregeln und erkennen, dass sie diese bereits in

Jahrgangsstufe 5 im Zusammenhang mit Größen verwendet haben. Vor allem bei der Anwendung in Sachaufgaben entwickeln sie ein Gespür für die jeweils vorteilhafteste Schreibweise von Zahlen.

- Addition und Subtraktion positiver Brüche und gemischter Zahlen
- Addition und Subtraktion positiver Dezimalzahlen

M 6.2.2 Multiplikation und Division (ca. 15 Std.)

Die Schüler lernen, positive Brüche zu multiplizieren und zu dividieren. Davon ausgehend finden sie Regeln für die entsprechenden Rechenoperationen bei Dezimalzahlen und erfahren insbesondere bei Flächenberechnungen, wie ihr Können im Vergleich zum Vorjahr angewachsen ist. Die Kinder lernen periodische Dezimalbrüche kennen; sie erweitern die für natürliche Zahlen bekannten Rundungsregeln auf Dezimalzahlen. An geeigneten Aufgabenbeispielen wird ihnen deutlich, dass sie stets eine hinsichtlich des Rechenaufwands günstige Darstellungsform rationaler Zahlen wählen sollten.

- Multiplikation und Division positiver Brüche
- Multiplikation und Division positiver Dezimalzahlen, periodische Dezimalbrüche
- einfache Verbindungen der Rechenarten, auch aus Sachzusammenhängen heraus

M 6.3 Flächen- und Rauminhalt

In Jahrgangsstufe 5 standen beim Thema Flächenmessung das Rechteck bzw. darauf zurückführbare Figuren im Vordergrund. Diese Kenntnisse bilden den Ausgangspunkt für die genauere Untersuchung weiterer Figuren, deren Flächeninhalt durch Formeln erfasst wird. Die prinzipielle Vorgehensweise bei der Messung von Flächen übertragen die Schüler außerdem auf die Volumenmessung. Anknüpfend an die Erfahrungen im Fach Natur und Technik werden auch Fragen der Genauigkeit von Messwerten angesprochen.

M 6.3.1 Flächeninhalt geradlinig begrenzter Figuren (ca. 10 Std.)

Ausgehend von dem Prinzip des Zerlegens und Ergänzens von Flächen, das bereits in der Jahrgangsstufe 5 die Bestimmung des Flächeninhalts verschiedener Figuren ermöglicht hat, erarbeiten die Schüler die Flächenformel für Dreieck, Parallelogramm und Trapez. Dabei steht wiederum der Blick für geometrische Zusammenhänge und nicht das Auflösen von Formeln im Vordergrund, das erst in den darauf folgenden Jahrgangsstufen an Bedeutung gewinnt. Die Schüler erkennen die Inhaltsgleichheit unterschiedlicher Dreiecke, die in einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen. Die Berechnung der Oberflächeninhalte von Körpern erfordert den Wechsel zwischen zwei- und dreidimensionaler Betrachtungsweise und fördert dadurch das räumliche Vorstellungsvermögen.

- Flächenformel für Dreiecke, inhaltsgleiche Dreiecke
- Berechnung von Oberflächeninhalten einfacher Körper, auch unter Verwendung von Netzen und Schrägbildern

M 6.3.2 Volumen (ca. 12 Std.)

Anknüpfend an die bei den Themen Länge und Flächeninhalt erworbenen Kenntnisse über das Grundprinzip des Messens wird der Begriff Volumen erarbeitet. Die Schüler lernen Volumeneinheiten sowie die Formel für den Rauminhalt des Quaders kennen und wenden dieses Wissen in unterschiedlichen Zusammenhängen an.

- Grundprinzip der Volumenmessung
- Volumenformel des Quaders, Volumenbestimmung durch Zerlegen und Ergänzen von Körpern

M 6.4 Rechnen mit rationalen Zahlen (ca. 14 Std.)

Auf anschauliche Weise haben die Schüler bereits im vorausgehenden Schuljahr gelernt, mit ganzen Zahlen umzugehen. Diese Grundlagen werden nun wiederholt, systematisiert, vertieft und auf Bruchzahlen erweitert. Die Kinder lernen, rationale Zahlen möglichst geschickt zu vergleichen und mit ihnen zu rechnen. An Termen angemessener Komplexität gewinnen sie die nötige Routine im Umgang damit.

- Größenvergleich rationaler Zahlen
- Rechenregeln für das Rechnen mit rationalen Zahlen
- Verbindung der vier Grundrechenarten

M 6.5 Mathematik im Alltag: Prozentrechnung und Diagramme (ca. 10 Std.)

Anhand vielfältiger Beispiele aus dem Alltag erkennen die Schüler die Bedeutung der Prozentrechnung. Sie wenden diese auch im Zusammenhang mit der Interpretation und Erstellung von Diagrammen an. Dabei entwickeln sie ein Gespür, wie die Art der Darstellung von Daten den Eindruck des Betrachters lenken kann.

- Erarbeiten grundlegender Kenntnisse der Prozentrechnung
- Interpretation von Diagrammen, manipulative Darstellung in Diagrammen

M 6.6 Vertiefung (ca. 14 Std.)

Die bisher erworbenen Kenntnisse über die rationalen Zahlen werden anhand von Sachaufgaben ausgebaut, wobei sich erneut vielfältige Bezüge und Verknüpfungen zu bereits behandelten Inhalten ergeben. Dabei kommen auch typische Problemlösungsstrategien zur Anwendung. Die intuitiv seit der Grundschule verwendete Schlussrechnung wird anhand von Zusammenhängen zwischen Größen (z. B. Menge und Preis) aufgegriffen und vertieft. Unterschiedliche Fragestellungen aus der Geometrie festigen beim Schüler das Verständnis für die Grundprinzipien des Messens. Um ein tieferes Verständnis für Größenordnungen zu gewinnen, werden beispielsweise Prozentangaben oder relative Häufigkeiten diskutiert. Die Schüler lernen dabei zu verbalisieren und ihre Erkenntnisse in einer für ihr Alter angemessenen und zudem ansprechenden Form zu präsentieren.

Lehrplan Mathematik JGS 7

4–stündig

In Jahrgangsstufe 7 wird an früher behandelte Themen angeknüpft; diese werden auf höherem Abstraktionsniveau weitergeführt, wobei das Begründen von Zusammenhängen an Bedeutung gewinnt und das analytische Denken der Schüler stärker gefordert wird. Methodenvielfalt und Förderung selbständigen Arbeitens kommen den Jugendlichen in ihrer Persönlichkeitsentwicklung entgegen und unterstützen gleichzeitig das Erreichen der fachlichen Ziele. [[Hierzu trägt auch die sinnvolle Verwendung von Rechnern im Unterricht und bei der häuslichen Arbeit bei; von]] Von Anfang an wird [[dabei]] großer Wert auf die kritische Überprüfung [[der]] von Ergebnissen z. B. durch Überschlagsrechnung gelegt. In den Jahrgangsstufen 5 und 6 wurden wesentliche Aspekte der Arithmetik erarbeitet. Diese wird nun vertieft und in der stärker formalisierenden Algebra weitergeführt. Die Schüler erwerben beim Umgang mit Termen und Gleichungen grundlegende algebraische Kenntnisse, wobei die eingehende Beschäftigung mit Termen gleichzeitig der Funktionspropädeutik dient. Anknüpfend an ihr Vorwissen entdecken sie Zusammenhänge in der Figurengeometrie, wobei sie Freude an der Geometrie gewinnen und ästhetisches Empfinden entwickeln sollen. Das neu hinzukommende Konstruieren fordert Sorgfalt und Genauigkeit. Die Schüler lernen, bei der Planung bzw. Beschreibung von Konstruktionen [→ D 7.1, D 6.2 Beschreiben von Vorgängen; NT 7.2.3 Algorithmen] auf Schlüssigkeit, Vollständigkeit und Eindeutigkeit zu achten. Im Bereich der Stochastik festigen sie ihre Vorkenntnisse und beschäftigen sich dabei nochmals intensiv mit der Prozentrechnung.

In der Jahrgangsstufe 7 erwerben die Schüler folgendes Grundwissen:

- Sie rechnen sicher mit rationalen Zahlen und beherrschen die Grundlagen der Prozentrechnung.
- Sie können Terme aufstellen und analysieren sowie elementare Termumformungen ausführen.
- Sie sind in der Lage, lineare Gleichungen auch im Anwendungszusammenhang aufzustellen und zu lösen.
- Sie können Daten rechnerisch und graphisch auswerten.
- Sie beschreiben mit grundlegenden Begriffen (u. a. Kongruenz) Zusammenhänge an geometrischen Figuren und wenden geometrische Sätze (u. a. Satz von Thales) bei Konstruktionen und Begründungen an.
- Sie sind in der Lage, im algebraischen bzw. geometrischen Kontext zu argumentieren.

M 7.1 Figurengeometrie: vom Zeichnen und Beschreiben zum Konstruieren und Begründen

Bei der Erzeugung symmetrischer Figuren lernen die Schüler das mathematisch wie kulturhistorisch bedeutsame Prinzip der Konstruktion mit Zirkel und Lineal kennen. Sie lernen, geometrische Phänomene allmählich differenzierter zu analysieren sowie folgerichtig zu argumentieren und zu begründen. Eine abstraktere Denkweise ergänzt nach und nach ihren bisher anschaulich und intuitiv geprägten Wissenserwerb.

M 7.1.1 Achsen- und punktsymmetrische Figuren (ca. 12 Std.)

Anhand von Figuren aus ihrer Erfahrungswelt erkennen die Schüler die Achsen- und Punktsymmetrie als natürliches Gestaltungsprinzip. Sie verwenden aus der Anschauung gewonnene Fundamentalsätze zur Begründung der ersten Grundkonstruktionen. Anhand der Vielfalt der Vierecke erschließt sich ihnen die Symmetrie als ein Ordnungsprinzip.

- Achsensymmetrie: Eigenschaften, Konstruktion von Spiegelpunkt und Achse [[[→ NT 7.1.1]]]
- Mittelsenkrechte, Lot; Winkelhalbierende
- Punktsymmetrie: Eigenschaften, Konstruktion von Spiegelpunkt und Zentrum
- Übersicht über symmetrische Vierecke

M 7.1.2 Winkelbetrachtungen an Figuren (ca. 8 Std.)

Die Schüler entdecken die wesentlichen Zusammenhänge an Geradenkreuzungen bzw. Doppelkreuzungen mit parallelen Geraden und beschäftigen sich mit Winkelsummensätzen. Dabei wird ihnen auch der Unterschied zwischen Fundamentalsätzen und daraus abgeleiteten Sätzen deutlich gemacht.

- Geradenkreuzung: Scheitel- und Nebenwinkel; Doppelkreuzung: Stufen- und Wechselwinkel
- Innenwinkelsumme beim Dreieck und beim Viereck

M 7.2 Auf dem Weg von der Zahl zur Funktion

Die Verwendung von Variablen beispielsweise in einfachen Formeln aus der Geometrie ist den Jugendlichen bereits bekannt. Sie befassen sich nun mit Termen, systematisieren ihre Vorkenntnisse und sammeln erste Erfahrungen mit funktionalen Zusammenhängen.

M 7.2.1 Term und Zahl (ca. 6 Std.)

Die Schüler erkennen, dass Sachverhalte bei Verwendung von Variablen kurz und treffend beschrieben werden können. Damit wird der bisher verwendete Termbegriff erweitert. Bei Termwertberechnungen wiederholen und vertiefen sie ihre Kenntnisse und Fertigkeiten im Rechnen mit rationalen Zahlen.

- Termbegriff, Berechnen von Termwerten

M 7.2.2 Term und Abhängigkeit (ca. 6 Std.)

Bei der Beschäftigung mit unterschiedlichsten funktionalen Abhängigkeiten erfahren die Schüler, wie diese mit Termen beschrieben werden können. Sie diskutieren daraus resultierende Fragestellungen und bereiten so den Funktionsbegriff vor. Unter anderem erkennen sie, dass zu jeder zulässigen Einsetzung genau ein Termwert gehört.

- Aufstellen und Interpretieren von Termen
- Argumentieren mithilfe von Termen, Veranschaulichen ausgewählter Terme

M 7.3 Terme und Gleichungen

Beim Diskutieren von Abhängigkeiten und Begründen von Sachverhalten stellen die Schüler fest, dass das Umformen von Termen bzw. das Lösen von Gleichungen nötig ist. Im Sinne kumulativen Lernens üben sie die grundlegenden Techniken ein, die sie im weiteren Verlauf des Schuljahrs und in den nachfolgenden Jahrgangsstufen vertiefen.

M 7.3.1 Umformen von Termen (ca. 16 Std.)

Beispielsweise beim unterschiedlichen Vorgehen zur Gewinnung der Flächenformel des Trapezes zeigt sich, dass Terme zielgerichtet, also abhängig vom jeweiligen Kontext, umgeformt werden müssen. Die Schüler lernen, auf der Grundlage der Rechengesetze für rationale Zahlen Terme angemessener Komplexität in äquivalente Terme umzuwandeln. Dabei wird je nach Zielsetzung zusammengefasst, ausmultipliziert und in einfachen Fällen auch faktorisiert. Durch intensives Üben wird ein Fundament algebraischer Fertigkeiten gelegt.

- Zusammenfassen der Rechengesetze für rationale Zahlen
- Umformen von Produkten, Potenzen mit natürlichen Exponenten
- Umformen von Summen, Klammerregeln, Multiplizieren von Summen

M 7.3.2 Lösen von Gleichungen (ca. 9 Std.)

Das Mathematisieren von Sachzusammenhängen führt häufig zu linearen Gleichungen mit einer Variablen [→ NT 7.1]. Die Schüler gewinnen Verständnis für das systematische Lösen dieser Gleichungen und lernen, einen Lösungsalgorithmus sicher anzuwenden. Dabei wird ihnen bewusst, dass sie die durch das Kalkül gewonnene Lösung kritisch reflektieren müssen.

- Begriff der linearen Gleichung mit einer Variablen
- Aufstellen und Lösen solcher Gleichungen

M 7.4 Mathematik im Alltag: Daten, Diagramme und Prozentrechnung (ca. 11 Std.)

Die Schüler werten Daten aus Zufallsexperimenten oder statistischen Erhebungen graphisch und rechnerisch aus. Das Analysieren von Diagrammen [→ D 7.1] fördert ihre Fähigkeit, Sachverhalte zu beurteilen. Sie wiederholen dabei [[den Begriff der relativen Häufigkeit und]] die Grundlagen des Prozentrechnens. Durch Beschäftigung mit Fragestellungen, die eine Veränderung des Grundwerts erfordern, vertiefen die Schüler ihre Kenntnisse aus Jahrgangsstufe 6.

- Auswerten von Daten (auch arithmetisches Mittel) [→ Geo 7.8]
- Wiederholen und Vertiefen des Prozentrechnens

M 7.5 Figurengeometrie: das Dreieck als Grundfigur

Häufig lassen sich reale Objekte gut mit geradlinig begrenzten geometrischen Figuren darstellen, deren Untersuchung unmittelbar auf Dreiecke als Grundbausteine führt. Daher beschäftigen sich die Schüler unter verschiedenen Gesichtspunkten weiter mit der Grundfigur Dreieck. Um geometrische Zusammenhänge auch experimentell zu erschließen, nutzen die Schüler dynamische Geometriesoftware als interaktives Werkzeug und knüpfen dabei an die aus Natur und Technik (Schwerpunkt Informatik) bekannte objektorientierte Sichtweise an [→ NT 6.2, NT 7.2] .

M 7.5.1 Kongruenz (ca. 6 Std.)

Die Frage, wann zwei Dreiecke deckungsgleich sind, führt die Schüler zur eindeutigen Konstruierbarkeit eines Dreiecks aus gegebenen Seiten oder Winkeln. Sie lernen davon ausgehend die Kongruenzsätze kennen, die als Fundamentalsätze verwendet werden.

- Begriff der Kongruenz von Figuren
- Kongruenzsätze für Dreiecke und grundlegende Konstruktionen

M 7.5.2 Besondere Dreiecke (ca. 14 Std.)

Durch Kongruenz- oder Symmetrieüberlegungen erfassen die Schüler die Eigenschaften des gleichschenkligen und des gleichseitigen Dreiecks. Am Beispiel des Satzes von Thales können sie erfahren, wie es dynamische Geometriesoftware erleichtern kann, Vermutungen aufzustellen. Sie verstehen den Beweis des Satzes von Thales sowie den seiner Umkehrung. Sie erkennen, dass sich neue Möglichkeiten für Konstruktionen eröffnen.

- gleichschenkliges und gleichseitiges Dreieck
- rechtwinkliges Dreieck, Satz des Thales; Konstruktion von Kreistangenten

M 7.5.3 Konstruktionen (ca. 12 Std.)

Beim Konstruieren von Dreiecken und Vierecken werden Einfallsreichtum und geistige Wendigkeit der Schüler entwickelt. Wesentliches Ziel ist außerdem die Fähigkeit, Konstruktionsabläufe zu planen und zu dokumentieren. Fragen der Konstruierbarkeit und Lösungsvielfalt bei Variation der Bestimmungsstücke untersuchen die Schüler z. B. mithilfe von dynamischer Geometriesoftware. Zur Abrundung ihrer Geometriekenntnisse setzen sie ihre erworbenen Fähigkeiten bei anwendungsbezogenen Aufgabenstellungen ein.

- Wiederholung von Höhe, Winkelhalbierender und Mittelsenkrechter; Umkreis
- Konstruktion von Dreiecken und Vierecken auch in Sachzusammenhängen

M 7.6 Vertiefen der Algebra (ca. 12 Std.)

Die Schüler mathematisieren erneut Sachzusammenhänge durch Terme oder Gleichungen. Dabei wählen sie die der jeweiligen Problemstellung angemessene Strategie, erkennen Sinn und Nutzen der bereits erlernten Techniken und vertiefen diese in vielfältigen Anwendungen. Um flexibel einsetzbare Grundlagen zu entwickeln, steht vor allem die Verknüpfung der verschiedenen erlernten Kenntnisse und Methoden im Vordergrund. Die Schüler verbessern ihre Fähigkeit, mithilfe von Termen zu argumentieren und Zusammenhänge zu verbalisieren. Dabei wiederholen und vertiefen sie gezielt den Umgang mit den bisher bekannten Größen und deren Einheiten [→ NT 7.1].

Lehrplan Mathematik JGS 8

3–stündig

In dieser Jahrgangsstufe wird der mathematische Abstraktionsprozess kontinuierlich weitergeführt, wobei Anwendungsbezüge ihren besonderen Stellenwert behalten. Die Schüler systematisieren und verallgemeinern Inhalte, die ihnen aus früheren Jahrgangsstufen bekannt sind. Sie üben logisches Argumentieren, das sie bereits im Lauf des bisherigen Unterrichts als ein Wesensmerkmal mathematischen Arbeitens kennengelernt haben. Selbständigkeit und Eigenverantwortung der Schüler werden durch entsprechende Arbeitsmethoden unterstützt.

Mit der Funktion wird ein zentraler mathematischer Begriff erarbeitet, der als universelles Hilfsmittel für das Mathematisieren von Zusammenhängen dient. Die Schüler beschäftigen sich näher mit linearen und einfachen gebrochen–rationalen Funktionen und üben beim Umgang damit auch Kalküle ein, die für Anwendungen in naturwissenschaftlichen Fächern und für nachfolgende Jahrgangsstufen notwendig sind. Mit Laplace-Wahrscheinlichkeiten wird ein mathematischer Bereich erschlossen, der im täglichen Leben eine wichtige Rolle spielt und bisher allein der Intuition zugänglich war. In der Geometrie wird den Schülern bei der Formulierung des Strahlensatzes und bei seinen zahlreichen Anwendungen deutlich, wie sich algebraische und geometrische Vorgehensweisen ergänzen.

In der Jahrgangsstufe 8 erwerben die Schüler folgendes Grundwissen:

- Sie erkennen und beschreiben funktionale Zusammenhänge.
- Sie können sicher mit linearen Funktionen arbeiten und Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten lösen.
- Sie können mit typischen Beispielen gebrochen–rationaler Funktionen und mit einfachen Bruchtermen umgehen sowie einfache Bruchgleichungen lösen.
- Sie können mit Potenzen mit ganzzahligen Exponenten umgehen.
- Sie sind in der Lage, Umfang und Flächeninhalt von Kreisen zu berechnen.
- Sie können die Strahlensätze anwenden und kennen den Begriff der Ähnlichkeit bei Dreiecken.
- Sie können in konkreten Situationen Laplace–Wahrscheinlichkeiten bestimmen.

M 8.1 Funktionale Zusammenhänge

In den vorausgegangenen Jahrgangsstufen haben die Schüler unter anderem bei der Beschäftigung mit Diagrammen, relativen Häufigkeiten und Termen zahlreiche Vorerfahrungen mit funktionalen Zusammenhängen gesammelt. Diese systematisieren und vertiefen sie nun, wobei sie eine breite Sicht auf Funktionen gewinnen sollen und die linearen Funktionen als eine spezielle Klasse von Funktionen verstehen. Die zentrale Bedeutung funktionaler Abhängigkeiten erfahren die Schüler anhand vielseitiger Anwendungen.

M 8.1.1 Proportionalität (ca. 9 Std.)

Anknüpfend an Alltagserfahrungen lernen die Schüler, die charakteristischen Eigenschaften direkt und indirekt proportionaler Größen in mathematischer Fachsprache zu beschreiben. Dabei finden sie experimentell den Zusammenhang zwischen Kreisumfang und Durchmesser als weiteres Beispiel direkt proportionaler Größen und gewinnen so erste Näherungswerte für die Kreiszahl p. Ihre neuen Kenntnisse über Proportionalitäten wenden sie bei den im täglichen Leben häufig vorkommenden Schlussrechnungen sowie bei naturwissenschaftlichen Fragestellungen an [→ [[NT 7.1.3 Gesetz von Hooke,]] Ph 8.3 Ohm'sches Gesetz].

- direkte Proportionalität, dabei Zusammenhang zwischen Kreisumfang und Radius
- indirekte Proportionalität

M 8.1.2 Funktion und Term (ca. 9 Std.)

Unterschiedliche Beispiele für die Abhängigkeit zweier Größen, die den Schülern aus dem bisherigen Unterricht bekannt sind, fassen sie unter dem übergeordneten Begriff Funktion zusammen. Anhand von Beispielen verschiedenartiger Funktionen gewinnen sie erste Vorstellungen davon, wie Term und Graph sich gegenseitig bedingen und wie Veränderungen bei realen Vorgängen als funktionale Abhängigkeit zweier Größen beschrieben werden können. Dabei unterstützen Funktionsplotter effektives Arbeiten.

Die Jugendlichen beschäftigen sich mit unterschiedlichen funktionalen Abhängigkeiten (z. B. Fieberkurven, Klimadiagramme, Handy–Tarife), die in Form von Tabellen, Diagrammen oder Termen dargestellt sein können. Als spezielles Beispiel für einen nichtlinearen Zusammenhang beschäftigen sie sich ausgehend von anschaulichen Überlegungen mit der Abhängigkeit des Kreisinhalts vom Radius.

Bei der Arbeit mit Funktionen vertiefen sie ihre Rechenfertigkeiten auch anhand einfacher Bruchterme und erfahren bei unterschiedlichen Fragestellungen ihre algebraischen Fertigkeiten als notwendiges Hilfsmittel.

- Funktionsbegriff
- funktionale Zusammenhänge erfassen und beschreiben, z. B. mit Tabellen, Diagrammen und Termen
- Zusammenhang zwischen Flächeninhalt und Radius des Kreises

M 8.1.3 Lineare Funktionen (ca. 13 Std.)

Ausgehend von direkt proportionalen Größen und zahlreichen, aus dem Alltag bekannten linearen Abhängigkeiten machen sich die Schüler mit der linearen Funktion als einem grundlegenden Funktionstyp vertraut. Sie erkennen, dass die Funktionsgleichung jeder linearen Funktion die Koordinatengleichung einer Geraden darstellt. Die Bestimmung von Nullstellen führt sie auf das bereits bekannte Lösen linearer Gleichungen. Sie lernen darüber hinaus, mit linearen Ungleichungen umzugehen.

- Definition der linearen Funktion, Interpretation der Parameter
- Arbeiten mit linearen Funktionen und ihren Graphen
- Lösen linearer Ungleichungen

M 8.1.4 Lineare Gleichungssysteme (ca. 10 Std.)

Die Schüler erkennen, dass viele Problemstellungen durch ein System linearer Gleichungen treffend beschrieben werden und dass ihre Kenntnisse über lineare Funktionen bei der Lösung hilfreich sind. Sie üben an inner- und außermathematischen Fragestellungen, mit Systemen linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten umzugehen.

- graphische und rechnerische Lösung linearer Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten
- Anwendung in Sachzusammenhängen

M 8.2 Stochastik: Laplace–Experimente (ca. 12 Std.)

Anknüpfend an Zufallsexperimente aus der Unterstufe, bei denen absolute und relative Häufigkeiten im Mittelpunkt standen, werden jetzt erstmals Wahrscheinlichkeiten berechnet und als Grad der Erwartung bzw. Grad der Sicherheit einer Prognose interpretiert. Die Schüler betrachten Laplace–Experimente und beschreiben zugehörige Versuchsausgänge unter Verwendung der mathematischen Fachsprache. Sie ermitteln Laplace–Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Baumdiagrammen bzw. durch geschicktes Abzählen. Ein Ausblick auf Zufallsexperimente, die nicht der Laplace–Annahme genügen, weckt bei den Schülern die Einsicht, dass eine umfassendere Formulierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs notwendig ist.

- Ergebnis, Ergebnisraum, Ereignis
- Berechnung von Laplace–Wahrscheinlichkeiten, Anwenden des Zählprinzips
- Abgrenzung des Begriffs ,,Laplace–Experiment" durch Beispiele

M 8.3 Funktionale Zusammenhänge: elementare gebrochen–rationale Funktionen (ca. 16 Std.)

Die Schüler erweitern anknüpfend an indirekt proportionale Größen ihre Kenntnisse über Funktionen durch einfache Beispiele gebrochen–rationaler Funktionen. Dabei vertiefen sie ihre Vorstellung vom Funktionsbegriff. Beispielsweise ausgehend von Schnittpunktsbestimmungen lernen sie, einfache Bruchgleichungen flexibel zu lösen sowie mit Bruchtermen zu rechnen. Das aus Jahrgangsstufe 7 bekannte Rechnen mit Potenzen mit natürlichen Exponenten wird in diesem Zusammenhang auf ganzzahlige Exponenten ausgeweitet.

- Beispiele gebrochen–rationaler Funktionen
- einfache Bruchgleichungen und Bruchterme, Auflösen von Formeln
- Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

M 8.4 Strahlensatz und Ähnlichkeit [→ Ku 8.4 Perspektive] (ca. 15 Std.)

Die Schüler erfahren anhand der Strahlensätze, wie Geometrie unter Verwendung algebraischer Methoden für viele praktische Zwecke verfügbar wird. Dadurch wird ihnen erneut die enge Verbindung von Geometrie und Algebra bewusst. Insbesondere üben sie nochmals das Lösen von Bruchgleichungen, die im Zusammenhang mit Proportionen entstehen. Das maßstäbliche Vergrößern bzw. Verkleinern führt die Schüler unmittelbar zur Ähnlichkeit von Figuren, die den bereits bekannten Kongruenzbegriff verallgemeinert.

Im Sinne einer abrundenden Wiederholung und Vernetzung erkennen die Schüler dabei auch Bezüge zu anderen Inhalten, beispielsweise zur funktionalen Beschreibung von Zusammenhängen.

- Strahlensätze
- Ähnlichkeit von Dreiecken

Lehrplan Mathematik JGS 9

4–stündig

In dieser Jahrgangsstufe wächst bei den Schülern das Reflexions- und Urteilsvermögen. Die Jugendlichen werden daher auch im Mathematikunterricht dazu angeregt, verstärkt Lösungen zu hinterfragen, Argumente auszutauschen sowie ihre Ergebnisse unter Verwendung angemessener Fachsprache und mithilfe graphischer Darstellungen zu präsentieren.

Die Schüler erkennen, dass die Menge der rationalen Zahlen sich zur Lösung bestimmter Problemstellungen als nicht ausreichend erweist. Beim Übergang zur Zahlenmenge der reellen Zahlen werden Probleme angesprochen, die bereits in der Mathematik und Philosophie der griechischen Antike [→ Gr 9.3] eine große Rolle spielten. Mit der quadratischen Funktion und deren vielseitiger Anwendung bauen die Jugendlichen ihre Fähigkeiten im funktionalen Denken aus. In Stochastik wird bei der Untersuchung zusammengesetzter Zufallsexperimente ihre Fähigkeit gefördert, vom Zufall bestimmte Vorgänge richtig zu beurteilen. In der Geometrie begegnen sie mit der Satzgruppe des Pythagoras einer mathematisch und kulturhistorisch bedeutsamen Erkenntnis. Diese Sätze wie auch Grundbegriffe der Trigonometrie und die Vertiefung der Raumgeometrie erweitern die Vielfalt an Möglichkeiten, Sachzusammenhänge mathematisch zu erfassen.

In der Jahrgangsstufe 9 erwerben die Schüler folgendes Grundwissen:

- Sie sind sich der Notwendigkeit von Zahlenbereichserweiterungen bewusst und können mit Wurzeln und Potenzen umgehen.
- Sie können mit quadratischen Funktionen und deren Graphen sicher umgehen und quadratische Gleichungen sicher lösen.
- Sie können die Aussage des Satzes von Pythagoras erläutern und sicher anwenden.
- Sie kennen die trigonometrischen Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck und können diese auch bei praxisbezogenen Fragestellungen anwenden.
- Sie können den Rauminhalt von Prisma, Pyramide, Zylinder und Kegel bestimmen.
- Sie erkennen elementare Grundfiguren wie Stützdreiecke in räumlichen Objekten.
- Sie können mehrstufige Zufallsprozesse beschreiben und Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Pfadregeln berechnen.
- Sie sind sich der Notwendigkeit von Begründungen bewusst.

M 9.1 Weiterentwicklung der Zahlvorstellung (ca. 14 Std.)

Die Schüler haben am Gymnasium bereits zweimal den zur Verfügung stehenden Zahlenbereich erweitert; die Unvollständigkeit der bisher verwendeten Menge der rationalen Zahlen an einer Nahtstelle zwischen Geometrie und Algebra macht ihnen die Notwendigkeit einer erneuten Erweiterung des Zahlenbereichs deutlich. Über den Wurzelbe¡griff lernen sie reelle Zahlen kennen, mithilfe numerischer Verfahren bestimmen sie exemplarisch die Dezimalbruchentwicklung irrationaler Zahlen. Schließlich erarbeiten sie Rechenregeln für Wurzeln und üben den Umgang mit Wurzeltermen.

- Quadratwurzel

- Zahlenbereichserweiterung: die Menge der reellen Zahlen; Hinweis auf die Irrationalität von p
- iterative Berechnung von Näherungswerten für Quadratwurzeln, dabei Einsatz elektronischer Hilfsmittel [→ Inf 9.1]
- Umgehen mit einfachen Wurzeltermen

M 9.2 Funktionale Zusammenhänge

In Jahrgangsstufe 8 haben sich die Schüler mit dem Begriff Funktion und verschiedenen Beispielen dazu befasst. Anhand quadratischer Terme entwickeln sie ihre Fähigkeit weiter, funktionale Zusammenhänge zu erfassen. Dabei bewahren sie den breiten Blick auf Funktionen und stellen immer wieder Bezüge zu den ihnen bereits bekannten Funktionen her. Der Einsatz von Funktionsplottern unterstützt die Schüler beim Aufbau des Verständnisses der betrachteten Zusammenhänge.

M 9.2.1 Graphen quadratischer Funktionen und deren Nullstellen (ca. 18 Std.)

Die Jugendlichen machen sich mit Funktionen zweiten Grades und deren Graphen vertraut. Die Frage nach Nullstellen führt sie dabei unmittelbar zu quadratischen Gleichungen. Bei paralleler Betrachtung von Funktionsgraph und entsprechender Gleichung entwickeln sie Verständnis dafür, wie sich die Änderung von Koeffizienten eines quadratischen Funktionsterms auf Form und Lage der zugehörigen Parabel, auf deren Achsenpunkte und damit auf die Lösungen der entsprechenden Gleichungen auswirkt. Gleichzeitig lernen sie graphische und rechnerische Verfahren zum Lösen quadratischer Gleichungen kennen und erarbeiten sich die allgemeine Lösungsformel. Dabei lernen sie die binomischen Formeln als nützliches Hilfsmittel kennen.

- binomische Formeln
- Parabeln als Graphen quadratischer Funktionen
- Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen

M 9.2.2 Quadratische Funktionen in Anwendungen (ca. 16 Std.)

Die Jugendlichen bearbeiten Anwendungsbeispiele aus unterschiedlichen Bereichen. Dabei gehen sie zur Lösung je nach Problemstellung von der zugehörigen quadratischen Funktion und deren Graph oder von der entsprechenden quadratischen Gleichung aus und vertiefen die in M 9.2.1 erarbeiteten Zusammenhänge. Beim Aufstellen von Parabelgleichungen ergibt sich die Notwendigkeit, Kenntnisse über lineare Gleichungssysteme wieder aufzugreifen und zu erweitern. Die Schüler greifen auf die aus dem vergangenen Schuljahr bekannten Funktionstypen zurück und betrachten verschiedene Schnittprobleme; sie lösen die entstehenden Gleichungen rechnerisch und graphisch. Dabei ergeben sich quadratische Gleichungen auch aus Bruchgleichungen, sodass die Schüler Kenntnisse über Bruchterme aus Jahrgangsstufe 8 auffrischen und vertiefen.

- Aufstellen von quadratischen Funktionen auch aus Sachzusammenhängen [→ Ph 9.3 Kinematik], einfache Extremwertprobleme

- Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten
- gemeinsame Punkte von Funktionsgraphen, u. a. von Gerade und Hyperbel; einfache Bruchgleichungen

M 9.3 Erweiterung des Potenzbegriffs (ca. 6 Std.)

Die Schüler verallgemeinern ihre Kenntnisse über Quadratwurzeln und übertragen die aus den vorherigen Jahrgangsstufen bekannten Rechenregeln auf Potenzen mit rationalen Exponenten, wobei sie auch Grundlagen für die Beschäftigung mit Exponentialfunktionen erwerben.

- allgemeine Wurzeln
- Rechenregeln für Potenzen mit rationalen Exponenten

M 9.4 Stochastik: Zusammengesetzte Zufallsexperimente (ca. 11 Std.)

In direkter Fortführung der Themen aus Jahrgangsstufe 8 beschäftigen sich die Schüler systematisch mit zusammengesetzten Zufallsexperimenten. An Baumdiagrammen veranschaulichen sie den Ablauf solcher Vorgänge. Sie lernen die Pfadregeln als Axiome kennen und verwenden diese zielgerichtet zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten. Die Jugendlichen ergänzen theoretische Überlegungen durch Simulationen z. B. mit Urnen oder Zufallszahlen.

- elementare zusammengesetzte Zufallsexperimente, Pfadregeln und ihre Anwendung

M 9.5 Das rechtwinklige Dreieck

Die Satzgruppe des Pythagoras stellt nicht zuletzt wegen ihrer reichhaltigen Bezüge zu anderen Inhalten für die Schüler ein zentrales Thema dieser Jahrgangsstufe dar. Neben den Aussagen dieser Sätze über Flächeninhalte er¡fah¡ren die Jugendlichen deren praktische Bedeutung für das Berechnen von Längen. Mit der Einführung von Sinus, Kosinus und Tangens werden weitere Möglichkeiten erschlossen, mit denen Zusammenhänge am rechtwinkligen Dreieck untersucht werden können.

M 9.5.1 Die Satzgruppe des Pythagoras (ca. 14 Std.)

Die Schüler erkennen, dass sie mithilfe der pythagoräischen Sätze in rechtwinkligen Dreiecken Berechnungen durchführen und Streckenlängen konstruieren können, deren Maßzahlen Quadratwurzeln sind. Beim Beweis der Satzgruppe machen sie sich wiederum die generelle Struktur mathematischer Sätze bewusst und üben erneut folgerichtiges Argumentieren. An vielfältigen Beispielen auch aus alltagsbezogenen Sachzusammenhängen [[sowie beim Erkunden geometrischer Eigenschaften der Parabel]] wird ihnen die Bedeutung der pythagoräischen Lehrsätze deutlich.

Katheten- und Höhensatz, Satz des Pythagoras und seine Umkehrung Anwendungen im algebraischen und geometrischen Kontext [[(u. a. Parabel aus geometrischer Sicht)]]

M 9.5.2 Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck (ca. 8 Std.)

Bei der Beschäftigung mit den Zusammenhängen zwischen Winkelmaßen und Seitenlängen in rechtwinkligen Dreiecken werden Sinus, Kosinus und Tangens für spitze Winkel definiert. Die Schüler lösen insbesondere Anwendungsaufgaben u. a. aus der Physik oder dem Vermessungswesen durch Rechnung, wobei ihnen ihr Wissenszuwachs besonders deutlich wird, da sie viele solcher Probleme bislang nur konstruktiv lösen konnten.

- Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck sowie ihre elementaren Beziehungen zueinander
- Werte von Sinus, Kosinus und Tangens für besondere Winkel; Berechnungen an Dreiecken

M 9.6 Fortführung der Raumgeometrie (ca. 25 Std.)

Eigenschaften der aus dem Alltag bekannten Körper Prisma, Zylinder, Pyramide und Kegel werden genauer untersucht. Bei Überlegungen an Schrägbildern und Netzen entwickeln die Schüler ihr räumliches Vorstellungsvermögen weiter, beim Bestimmen von Oberflächeninhalten und Volumina festigen sie ihre Kenntnisse über Flächen- bzw. Raummessung.

Die Schüler zeichnen bzw. skizzieren Schrägbilder, um Längen und Winkel an räumlichen Figuren zu veranschaulichen. Gestützt auf ihre algebraischen Kenntnisse berechnen sie geometrische Größen; sie erfahren erneut, dass diese Fertigkeiten unabdingbare Voraussetzung für mathematisches Handeln sind. Als abrundende Wiederholung und Vernetzung bearbeiten die Jugendlichen Aufgabenstellungen, bei denen auch andere Inhalte dieses oder des vorigen Schuljahrs, wie z. B. Trigonometrie, Strahlensatz oder Funktionen, benötigt werden.

- Netz, Oberflächeninhalt und Volumen von geradem Prisma und geradem Zylinder
- Netz, Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramide und Kegel
- Überlegungen an Körpern zur Bestimmung von Streckenlängen und Winkelgrößen; Sachanwendungen

Lehrplan Mathematik JGS 10

3–stündig

In der Jahrgangsstufe 10 können die Schüler zunehmend komplexe Sachzusammenhänge mathematisch erfassen. Dies spiegelt sich in den neu zu erwerbenden Kenntnissen und Denkweisen wider. Die Jugendlichen erweitern und vertiefen ihr Wissen über Funktionen und gewinnen dabei das für die folgenden Jahrgangsstufen erforderliche fundierte Verständnis für funktionale Zusammenhänge, wie es auch für Anwendungen z. B. in Naturwissenschaften und Technik unabdingbar ist. Sie beschäftigen sich mit neuen Funktionstypen wie den ganzrationalen Funktionen und der Exponentialfunktion. In einer Zusammenschau aller bisher bekannten Funktionen erwerben die Schüler einen aus der Anschauung gewonnenen Grenzwertbegriff. Insbesondere beim Untersuchen von Exponentialfunktionen, aber auch bei der Fortführung der Trigonometrie bearbeiten sie zahlreiche praxisbezogene Fragestellungen, die ihnen die Bedeutung der Mathematik für unsere Lebenswelt weiter verdeutlichen.

In dieser Jahrgangsstufe befassen sich die Jugendlichen erneut mit dem Kreis, wobei nun Überlegungen zu Grenzprozessen im Vordergrund stehen. Sie runden dabei ihr Wissen über reelle Zahlen ab und vertiefen ihren Einblick in die historische Entwicklung sowie die kulturelle Bedeutung der Mathematik. Bei der Untersuchung der Kugel und bei Berechnungen an zusammengesetzten Körpern wird ihnen wiederum bewusst, dass geometrische Methoden und algebraische Verfahren einander ergänzen.

In der Stochastik bauen die Schüler ihre Kenntnisse über zusammengesetzte Zufallsexperimente aus. Bei den im Vergleich zu Jahrgangsstufe 9 anspruchsvolleren Sachverhalten lernen die Jugendlichen, verschiedene Lösungsstrategien einzusetzen und Aussagen kritisch zu überprüfen.

In der Jahrgangsstufe 10 erwerben die Schüler folgendes Grundwissen:

- Sie können Volumen und Oberflächeninhalt von Kugeln bestimmen.
- Sie können sicher mit Sinus und Kosinus für beliebige Winkel umgehen.
- Sie verstehen die Bedeutung der Exponentialfunktion zur Beschreibung von Wachstumsprozessen in Natur, Technik und Wirtschaft.
- Sie können einfache Exponentialgleichungen lösen und mit Logarithmen rechnen.
- Sie können mit Exponentialfunktionen, trigonometrischen und ganzrationalen Funktionen sowie mit einfachen gebrochen-rationalen Funktionen umgehen.
- Sie können bei komplexeren mehrstufigen Zufallsexperimenten Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Pfadregeln bestimmen.
- Sie sind mit einem aus der Anschauung gewonnenen Grenzwertbegriff vertraut.

M 10.1 Kreiszahl π

In Jahrgangsstufe 8 haben sich die Schüler bereits mit der Kreismessung beschäftigt, die Formeln für Umfang und Flächeninhalt kennengelernt sowie erste Näherungswerte für p ermittelt. Aufbauend auf diesen Grundkenntnissen betrachten sie nun leistungsstärkere Näherungsverfahren zur Bestimmung der Kreiszahl p und erkennen die Notwendigkeit, Grenzprozesse durchzuführen. Am Beispiel der Kugel wird veranschaulicht, dass ähnliche Grenzprozesse auch bei räumlichen Betrachtungen angewendet werden können.

M 10.1.1 Kreis (ca. 8 Std.)

Die Schüler ermitteln mithilfe eines numerischen Verfahrens [→ Inf 9.1 Tabellenkalkulationssysteme] Näherungswerte für p. Dabei werden sie von elektronischen Hilfsmitteln wie einem Tabellenkalkulationsprogramm unterstützt. Sie erfahren, dass sich Gelehrte seit über zweitausend Jahren immer wieder mit der Kreiszahl p und der ,,Quadratur des Kreises" beschäftigt haben.

näherungsweise Bestimmung der Kreiszahl π Bogenmaß Berechnungen an Figuren, die elementare Kreisteile enthalten

M 10.1.2 Kugel (ca. 8 Std.)

An vielfältigen Beispielen wird den Schülern deutlich, dass die Kugel im Alltag und bei naturwissenschaftlicher Modellbildung eine besondere Rolle spielt. Sie ermitteln Formeln für Volumen und Oberflächeninhalt der Kugel und führen bei typischen anwendungsbezogenen Fragestellungen, z. B. aus der Natur oder Architektur, Berechnungen an Körpern durch.

Oberflächeninhalt und Volumen der Kugel Anwendungen aus Sachzusammenhängen, z. B. Groß- und Kleinkreise auf der Kugel

M 10.2 Geometrische und funktionale Aspekte der Trigonometrie (ca. 14 Std.)

Beispielsweise bei Fragen der Landvermessung erkennen die Schüler, dass die bisherige Definition trigonometrischer Funktionen verallgemeinert werden muss. Mit Sinus- und Kosinussatz erwerben sie Hilfsmittel, die ihnen Berechnungen an beliebigen ebenen Dreiecken erlauben. Die Schüler ergänzen die Menge der ihnen bereits bekannten Funktionen durch die Sinus- und Kosinusfunktion. Sie lernen Periodizität als ein neues, charakteristisches Merkmal von Funktionen kennen und untersuchen den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf die Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion. Dabei nutzen sie die Möglichkeit zur Veranschaulichung mithilfe von Funktionsplottern.

- Sinus und Kosinus am Einheitskreis
- Sinus- und Kosinussatz im Dreieck
- Sinus- und Kosinusfunktion
- Anwendungen in Sachzusammenhängen

M 10.3 Exponentielles Wachstum und Logarithmen (ca. 18 Std.)

Vielfältige Beispiele aus Natur, Technik und Wirtschaft machen den Jugendlichen die große Bedeutung von Wachstums- und Zerfallsprozessen bewusst; beispielsweise beim

Bevölkerungswachstum bzw. beim radioaktiven Zerfall erkennen sie, dass Wachstums- und Abklingprozesse häufig durch Exponentialfunktionen modelliert werden können. Aufbauend auf ihrem Wissen über Potenzen lernen sie die Exponentialfunktion sowie deren charakteristische Eigenschaften kennen und stellen insbesondere am Verlauf der zugehörigen Funktionsgraphen fest, wie sich exponentielles von linearem Wachstum unterscheidet.

Bei unterschiedlichen Problemstellungen, z. B. bei Altersbestimmungen, stellen die Jugendlichen Exponentialgleichungen auf, deren Lösung zur Definition des Logarithmus führt. Die Jugendlichen lernen, mit Logarithmen umzugehen.

Beispiele für exponentiellen Anstieg und exponentielle Abnahme [→ Ph 9.2 Radioaktivität], Abgrenzung des exponentiellen Wachstums von linearem Wachstum allgemeine Exponentialfunktion Begriff des Logarithmus, Rechenregeln für Logarithmen [→ CNTG 9.4, C 10.2 pH-Wert] einfache Exponentialgleichungen

M 10.4 Stochastik: Zusammengesetzte Zufallsexperimente (ca. 10 Std.)

Die Schüler haben sich bereits in der vorhergehenden Jahrgangsstufe mit zusammengesetzten Zufallsexperimenten beschäftigt, dabei aber nur einfachere Fälle betrachtet. Nun wenden sie sich anspruchsvolleren Fragestellungen zu, wobei sie Zusammenhänge [[wieder]] durch Vierfeldertafeln und Baumdiagramme veranschaulichen. Daran lernen sie den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit kennen und erfahren insbesondere bei Fragestellungen aus dem Alltag, dass bei Aussagen über die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses Zusatzinformationen zu berücksichtigen sind. Die Jugendlichen gewinnen so zunehmend an objektiver Urteilsfähigkeit.

- Anwenden der Pfadregeln, Begriff ,,bedingte Wahrscheinlichkeit"

M 10.5 Ausbau der Funktionenlehre

Die Schüler erweitern das Spektrum der ihnen bekannten Funktionsarten um die ganzrationalen Funktionen und entwickeln ihre Fähigkeiten weiter, funktionale Zusammenhänge zu untersuchen. Sie vertiefen ihr Verständnis dafür, wie sich Eigenschaften von Funktionsgraph und Funktionsterm wechselseitig bedingen. Grundlegende Merkmale, z. B. die Nullstellen oder die Symmetrie von Graphen, stehen dabei im Mittelpunkt. Ihr Wissen über funktionale Zusammenhänge setzen die Schüler flexibel ein, etwa beim graphischen Lösen von Gleichungen. Überlegungen an Funktionsgraphen festigen auch den intuitiv vorhandenen Grenzwertbegriff der Schüler, die so auf anschauliche Weise diesen grundlegenden Begriff der Infinitesimalrechnung kennenlernen.

M 10.5.1 Graphen ganzrationaler Funktionen (ca. 7 Std.)

Aufbauend auf ihrem bisherigen Wissen über Funktionen untersuchen die Jugendlichen ganzrationale Funktionen. Sie erfahren, dass zum Skizzieren eines Graphen einige wenige wesentliche Informationen genügen. In diesem Zusammenhang ermitteln sie Art und Lage von Nullstellen sowie das Verhalten der Funktionen an den Rändern des Definitionsbereichs.

- Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten
- ganzrationale Funktionen und ihre Nullstellen (Ermittlung z. B. über Polynomdivision), Vorzeichenbetrachtungen

M 10.5.2 Vertiefen der Funktionenlehre (ca. 19 Std.)

Bisher haben die Schüler ganzrationale, einfache gebrochen-rationale und trigonometrische Funktionen sowie Exponentialfunktionen kennengelernt. Sie wiederholen Grundbegriffe und analysieren vertiefend verschiedene Eigenschaften ausgewählter Graphen. Dabei ermitteln sie beispielsweise Nullstellen von Funktionen und wiederholen Techniken zur Lösung von Gleichungen. Die Schüler üben, den Verlauf von Graphen unter Verwendung der entsprechenden Fachbegriffe, wie z. B. Steigen und Fallen, mit Worten zu beschreiben. Sie erkennen in Analogie zum Vorgehen etwa bei quadratischen oder trigonometrischen Funktionen, wie sich Veränderungen des Funktionsterms auf den Kurvenverlauf auswirken. Anhand ausgewählter Beispiele wird ihnen deutlich, dass jeder Term in einer Variablen auch als Funktionsterm interpretiert werden kann, und sie denken über Möglichkeiten nach, wie Informationen über den Verlauf der zugehörigen Graphen erschlossen werden können, auch wenn diese nicht zu den bisher bekannten Typen gehören.

Anhand des unterschiedlichen Verhaltens von Funktionen an den Rändern ihres jeweiligen Definitionsbereichs gewinnen die Schüler aus der Anschauung heraus einen Grenzwertbegriff und verwenden erstmals systematisch die Grenzwertschreibweise.

- Überblick über die bisher bekannten Funktionstypen
- Eigenschaften ausgewählter Graphen: gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen, Symmetrie bezüglich y-Achse oder Ursprung (auch rechnerischer Nachweis)
- Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs, aus der Anschauung gewonnener Grenzwertbegriff für $x \to \pm\infty$
- Einfluss der Änderung von Parametern im Funktionsterm auf den Graphen, vor allem Verschieben oder Strecken des Graphen, Spiegeln an den Koordinatenachsen

Lehrplan Mathematik JGS 11/12

4–stündig

Im Mathematikunterricht der Jahrgangsstufen 11 und 12 befassen sich die Schüler mit komplexeren mathematischen Denkweisen und Sachverhalten. Der Themenstrang Funktionen, der bereits in der Unterstufe angelegt und zunehmend ausgebaut wurde, bildet nun den Schwerpunkt. Dabei gewinnt der in Jahrgangsstufe 10 aus der Anschauung gewonnene Grenzwertbegriff beim Arbeiten mit Funktionstermen weiter an Substanz. Anhand von Funktionen, bei denen sich in der Regel die Frage nach der Stetigkeit nicht stellt, erarbeiten die Schüler nun Methoden der Differential- und Integralrechnung. Diese Verfahren eröffnen ihnen neue Möglichkeiten, Lösungen für komplexere Anwendungsaufgaben zu entwickeln. Vielschichtigere Situationen aus Natur, Technik und Wirtschaft werden von den jungen Erwachsenen analysiert und mit Mitteln der Differential- und Integralrechnung mathematisch beschrieben. Gleichzeitig wird das weit über die Mathematik hinaus bedeutsame Verständnis für funktionale Zusammenhänge sowie die Fähigkeit, diese zu erfassen, gefördert. Die Schüler lernen zudem, elektronische Hilfsmittel dem jeweiligen Problem angemessen zu verwenden, und nutzen diese z. B. zur Visualisierung von funktionalen Zusammenhängen.

In der Stochastik lernen die Schüler aufbauend auf ihren bisher erworbenen Kenntnissen einen abstrakten Wahrscheinlichkeitsbegriff kennen und erfahren dabei exemplarisch, wie sich Begriffsbildungen in der Mathematik im Lauf der Zeit weiterentwickelt haben. Anhand binomialverteilter Zufallsgrößen setzen sich die Schüler mit Methoden der beurteilenden Statistik auseinander. Sie lernen, Ergebnisse statistischer Entscheidungsverfahren zu interpretieren und wesentliche, im Alltag vielfach als Schlagworte verwendete Begriffe richtig zu bewerten.

In der Geometrie verbessern die Schüler ihr räumliches Vorstellungsvermögen bei der Darstellung von Punkten und Körpern im dreidimensionalen Koordinatensystem. Sie lernen dabei Vektoren als nützliches Hilfsmittel kennen, mit dem insbesondere metrische Probleme vorteilhaft gelöst werden können. Die Jugendlichen erfahren vor allem bei der Betrachtung geometrischer Körper sowie bei der analytischen Beschreibung von Geraden und Ebenen, wie ihr bisher erworbenes Wissen durch Verfahren der Vektorrechnung erweitert wird.

Für interessierte Jugendliche bietet sich die Möglichkeit, Mathematik auch als Seminar zu wählen.

Jahrgangsstufe 11

M 11.1 Änderungsverhalten von Funktionen

Die Schüler erkennen, dass für viele Fragestellungen Aussagen über den Verlauf eines Graphen und über das Änderungsverhalten einer Funktion von Interesse sind. Sie lernen, grundlegende Verfahren der Infinitesimalrechnung anzuwenden, die ihnen helfen, funktionale Zusammenhänge besser zu beschreiben.

M 11.1.1 Graphen gebrochen-rationaler Funktionen (ca. 9 Std.)

Seit Jahrgangsstufe 8 kennen die Schüler Beispiele für gebrochen-rationale Funktionen. Sie vertiefen nun ihre Kenntnisse über diesen Funktionstyp und erweitern den aus der Anschauung gewonnenen Grenzwertbegriff für $x \to \pm\infty$ auf den Fall $x \to x_0$. Den Grobverlauf eines Graphen erschließen sie sich durch Analyse des Funktionsterms. Dabei berücksichtigen die Schüler auch schräge Asymptoten, wenn deren Gleichung unmittelbar aus dem jeweiligen Funktionsterm ersichtlich ist.

¡ Polstellen, horizontale und vertikale Asymptoten von Graphen gebrochen-rationaler Funktionen

M 11.1.2 Lokales Differenzieren (ca. 9 Std.)

Ausgehend von graphischen Betrachtungen und numerischen Untersuchungen des Differenzenquotienten lernen die Jugendlichen den Differentialquotienten als Grenzwert kennen. Sie verstehen ihn als geeignetes Maß zur Beschreibung lokaler Änderungsraten und deuten ihn geometrisch am Graphen. Die dabei benötigten Grenzwerte ermitteln sie mithilfe elementarer Termumformungen. Die Schüler lernen die Betragsfunktion als eine Funktion kennen, die an einer Stelle ihres Definitionsbereichs nicht differenzierbar ist, und interpretieren diese Eigenschaft auch graphisch.

- der Differenzenquotient und seine Deutung als Sekantensteigung bzw. mittlere Änderungsrate
- der Differentialquotient und seine Deutung als Tangentensteigung bzw. lokale Änderungsrate
- Begriff der Differenzierbarkeit, Abgrenzung insbesondere durch die Betragsfunktion

M 11.1.3 Globales Differenzieren (ca. 13 Std.)

Lokal ermittelte Werte für die Ableitung führen zum Begriff der Ableitungsfunktion. Die Schüler lernen, Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten zu differenzieren, und erarbeiten Regeln, die es ihnen erlauben, rationale Funktio¡nen abzuleiten. Die Aufgabe, zu gegebener Ableitungsfunktion eine zugehörige Funktion zu finden, führt die Jugendlichen zum Begriff der Stammfunktion. Sie lernen auch, allein aus dem Graphen einer Funktion auf den Verlauf der Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion und möglicher Stammfunktionen zu schließen.

- Ableitungsfunktion
- Ableitung ganzrationaler Funktionen, Summenregel, Produktregel
- Ableitung von gebrochen-rationalen Funktionen, Quotientenregel
- Begriff der Stammfunktion, Ermitteln von Stammfunktionstermen

M 11.1.4 Anwendungen der ersten Ableitung (ca. 11 Std.)

Die Schüler erkennen, dass mithilfe der Ableitungsfunktion präzisere Aussagen über den Verlauf von Funktionsgraphen und das Änderungsverhalten von Funktionen gemacht werden können. Mit dem Newton-Verfahren lernen sie, ein effizientes iteratives Verfahren anzuwenden, das mithilfe der Ableitung Näherungswerte für Nullstellen liefert, die sich mit den bisherigen Kenntnissen nicht berechnen lassen.

- Monotonie und lokale Extremwerte
- Untersuchung rationaler Funktionen
- Newton-Verfahren

M 11.2 Koordinatengeometrie im Raum (ca. 22 Std.)

Die Schüler festigen ihre geometrischen Kenntnisse in anspruchsvolleren räumlichen Betrachtungen. In geeignet gewählten dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystemen stellen sie Punkte sowie Körper dar und arbeiten mit Vektoren im Anschauungsraum û auch unter Verwendung der zugehörigen Koordinatenschreibweise. Beim Zeichnen geometrischer Körper im Schrägbild festigen die Jugendlichen ihr räumliches Vorstellungsvermögen und entwickeln ihre Vorstellung von Lagebeziehungen im Raum weiter.

Fragen der Längen- und Winkelmessung führen die Schüler zum Skalarprodukt von Vektoren und dessen Anwendungen; dabei lernen sie auch, Gleichungen von Kugeln in Koordinatenform zu formulieren. Die Jugendlichen erkennen, dass zur Bestimmung von orthogonalen Vektoren das Vektorprodukt vorteilhaft eingesetzt werden kann. Der praktische Nutzen von Skalar- und Vektorprodukt wird ihnen auch bei der Ermittlung von Flächeninhalten und Volumina geeigneter geometrischer Objekte deutlich. Bei der Beschreibung und Untersuchung geometrischer Figuren und Körper sind die Schüler nun in der Lage, sowohl auf die Vektorrechnung als auch auf grundlegende Verfahren aus der Mittelstufe zurückzugreifen.

- dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem, Darstellen von Punkten und einfachen Körpern
- Vektoren im Anschauungsraum, Rechnen mit Vektoren
- Anwendungen von Skalar- und Vektorprodukt
- Berechnungen an Körpern, u. a. Flächeninhalte und Volumina

M 11.3 Weitere Ableitungsregeln (ca. 14 Std.)

Die Jugendlichen treffen beispielsweise bei der Untersuchung naturwissenschaftlicher Fragestellungen erneut auf die Sinus- und Kosinusfunktion, deren Ableitungsfunktionen sie sich auf graphischem Weg plausibel machen.

Der Übergang von der lokalen Umkehroperation zur zugehörigen Umkehrfunktion führt die Schüler von der Quadratfunktion zur Wurzelfunktion, die häufig auch in Verkettung mit anderen Funktionen auftritt. Sie lernen, mit diesem Funktionstyp umzugehen sowie die Kettenregel anzuwenden. Anhand vielfältiger, auch anwendungsbezogener Aufgabenbeispiele gewinnen die Jugendlichen zunehmend Sicherheit beim Arbeiten mit den bisher bekannten Ableitungsregeln.

- Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion

- die Wurzelfunktion und ihre Ableitung, Ableitung von Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten
- Verkettung von Funktionen, Kettenregel

M 11.4 Natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion (ca. 11 Std.)

Die Schüler erkennen, dass sie noch nicht alle ihnen bekannten Funktionen differenzieren können. Beispielsweise bei der Frage nach der Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion lernen sie die Euler'sche Zahl e kennen. Hierbei bietet sich zur Abrundung der im Lauf der Gymnasialzeit aufgebauten Zahlvorstellung ein Rückblick auf die Zahlenbereichserweiterungen an.

Mithilfe anschaulicher Überlegungen erfassen die Jugendlichen den Zusammenhang zwischen den Graphen von natürlicher Exponential- und natürlicher Logarithmusfunktion. Durch Untersuchung einfacher Verknüpfungen der bisher bekannten Funktionen mit der natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktion vertiefen sie ihre Kenntnisse.

- natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion und ihre Ableitungen

M 11.5 Wahrscheinlichkeitsbegriff (ca. 10 Std.)

Die Entwicklung eines abstrakten Wahrscheinlichkeitsbegriffs erlaubt es den Schülern, verschiedene bereits aus den vorhergehenden Jahrgangsstufen bekannte Begriffe und Vorgehensweisen zu präzisieren und zu erweitern. Sie erkennen, dass für weitergehende Betrachtungen von Zufallsexperimenten, die nicht der Laplace-Annahme genügen, ein tragfähiger, auf unterschiedliche Sachverhalte anwendbarer Wahrscheinlichkeitsbegriff nötig ist. Die Tatsache, dass auch bedeutende Mathematiker bis zu seiner axiomatischen Fundierung lange um eine einwandfreie Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs gerungen haben, macht den Schülern deutlich, dass in der Mathematik ein ständiger Prozess der Entwicklung von Begriffen und Aussagen stattfindet.

Die Schüler arbeiten nun formaler mit Ereignissen und vertiefen dabei ihre bisherigen Kenntnisse. Sie erkennen, wie die Darstellung eines Ereignisses als Komplement-, Schnitt- oder Vereinigungsmenge es erleichtern kann, dessen Wahrscheinlichkeit zu bestimmen. Ausgehend vom bereits bekannten Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit lernen die Schüler, zwischen abhängigen und unabhängigen Ereignissen zu unterscheiden sowie Aussagen darüber zu machen, ob Ereignisse einander beeinflussen.

- axiomatische Definition von Wahrscheinlichkeit
- verknüpfte Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten

M 11.6 Anwendungen der Differentialrechnung (ca. 13 Std.)

Beispielsweise bei Fragen der Optimierung setzen die Schüler ihre neu erworbenen Kenntnisse über Funktionen und deren Ableitung ein. Die Interpretation der Ableitung als

Änderungsverhalten der Funktion bzw. als Tangentensteigung des zugehörigen Graphen wird dabei den Jugendlichen erneut bewusst. Sie vertiefen die erlernten Techniken, indem sie diese auch auf einfache Funktionen mit Parametern anwenden und Funktionsterme mit vorgegebenen Eigenschaften bestimmen. Die Schüler erkennen, dass insbesondere bei praktischen Anwendungen verschiedenster Funktionen die berechneten Ergebnisse stets interpretiert und auf ihre Sinnhaftigkeit überprüft werden müssen, etwa im Zusammenhang mit Randextrema oder Parametern.

Extremwertprobleme Anpassen von Funktionen an vorgegebene Bedingungen Jahrgangsstufe 12

M 12.1 Fortführung der Infinitesimalrechnung

Auf der Grundlage ihrer Kenntnisse über Grenzwerte aus Jahrgangsstufe 11 gewinnen die Schüler mit der Integra¡tion ein tragfähiges Verfahren zur Messung von Flächeninhalten. Sie erarbeiten die wesentlichen Begriffe und Konzepte und wenden diese zielgerichtet an. Dabei lernen sie auch, durch Untersuchung des Krümmungsverhaltens von Funktionsgraphen deren Verlauf präziser zu beschreiben.

M 12.1.1 Flächeninhalt und bestimmtes Integral (ca. 14 Std.)

Die Schüler haben in Jahrgangsstufe 11 die Ableitung einer Funktion als Möglichkeit zur Erfassung der lokalen Änderungsrate kennengelernt; sie machen sich nun bewusst, dass sich die zugehörige Gesamtänderung als Flächeninhalt unter dem Graph, der die lokale Änderungsrate beschreibt, deuten lässt. Ihre Überlegungen führen die Jugendlichen auf das bestimmte Integral und dessen Interpretation als Flächenbilanz.

Die Schüler lernen, Integrale zu berechnen und in Sachzusammenhängen anzuwenden. Dazu begründen sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung mithilfe anschaulicher Überlegungen und stellen die Verbindung mit der aus Jahrgangsstufe 11 bekannten Stammfunktion her. Sie erkennen, dass Differenzieren und Integrieren Umkehroperationen sind.

- bestimmtes Integral, Integralfunktion
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Berechnung von Flächeninhalten

M 12.1.2 Weitere Eigenschaften von Funktionen und deren Graphen (ca. 7 Std.)

Die neuen Begriffe und Verfahren werden bei verschiedenen Fragestellungen angewandt, insbesondere bei solchen, die eine geometrische Deutung der Integralfunktion erfordern. Dabei greifen die Schüler auch die bereits bekannten Zusammenhänge zwischen den Graphen von Funktion und Ableitungsfunktion wieder auf.

Beispielsweise beim Erschließen des Verlaufs des Graphen einer Integralfunktion aus dem der Integrandenfunktion und aus deren Ableitung lernen die Schüler neben der Monotonie nun auch die Krümmung als Eigenschaft von Graphen kennen. Sie untersuchen das Krümmungsverhalten an Beispielen bisher bekannter Funktionstypen.

- Zusammenhänge zwischen den Graphen von Funktion, Ableitungsfunktion und Integralfunktionen
- Krümmungsverhalten und Wendepunkte

M 12.2 Stochastik: Binomialverteilung und ihre Anwendung in der beurteilenden Statistik (ca. 26 Std.)

Die Jugendlichen erkennen, dass im Alltag vielfach Zufallsexperimente von Bedeutung sind, für deren Versuchsausgang es lediglich zwei Alternativen gibt. Bei der Beschreibung solcher Zufallsexperimente lernen sie den Binomialkoeffizienten als sinnvolle Abkürzung kennen und werden mit der Binomialverteilung vertraut. Insbesondere an dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung gewinnen die Schüler auch Einsicht in die Bedeutung und Definition der Begriffe Zufallsvariable, Erwartungswert und Standardabweichung. Ihnen wird bewusst, dass sich Bernoulli-Experimente mit dem Urnenmodell ,,Ziehen mit Zurücklegen" veranschaulichen lassen; zudem arbeiten sie die Unterschiede zum Urnenmodell ,,Ziehen ohne Zurücklegen" heraus. Die Visualisierung von Verteilungen, z. B. mithilfe von Tabellenkalkulationsprogrammen, unterstützt die Bearbeitung verschiedenster Sachprobleme und die Beantwortung von Fragestellungen, die typische Überlegungen zu Fehlerwahrscheinlichkeiten im Zusammenhang mit Tests vorbereiten.

Am Beispiel des einseitigen Signifikanztests erhalten die Schüler einen Einblick in die beurteilende Statistik. Sie lernen einzuschätzen, wie sich Änderungen von Stichprobenlänge, Ablehnungsbereich oder Signifikanzniveau auf die Aussage des Tests auswirken.

- Bernoulli-Experiment und Bernoulli-Kette
- Binomialkoeffizient, Binomialverteilung
- Anwendung der Binomialverteilung insbesondere am Beispiel des einseitigen Signifikanztests

M 12.3 Geraden und Ebenen im Raum (ca. 22 Std.)

Aufbauend auf dem ihnen bereits bekannten Rechnen mit Vektoren lernen die Schüler zur analytischen Beschreibung von Geraden und Ebenen im Raum Gleichungen in Parameterform kennen und deuten die lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit von Vektoren anschaulich. Sie arbeiten mit der Ebenengleichung in Normalenform, die sich bei Abstandsberechnungen und Lagebetrachtungen als vorteilhaft erweist. Bei Schnittproblemen vertiefen sie ihr Wissen über lineare Gleichungssysteme aus der Mittelstufe. Die Schüler veranschaulichen in Schrägbildern die Lage von Geraden und Ebenen und untersuchen Eigenschaften von Körpern. Dabei wird ihnen erneut bewusst, dass manche Aufgabenstellungen sowohl mit Methoden der analytischen Geometrie als auch mit den aus der Mittelstufe bekannten Verfahren gelöst werden können.

- Beschreibung von Geraden und Ebenen durch Gleichungen
- Lagebeziehungen: gegenseitige Lage von Geraden, von Ebenen sowie von Geraden und Ebenen zueinander

- Abstands- und Winkelbestimmungen, insbesondere unter Verwendung der Hesse'schen Normalenform
- Anwendungen in Sachzusammenhängen

M 12.4 Anwendungen der Differential- und Integralrechnung (ca. 15 Std.)

Bei praxisnahen Fragestellungen, z. B. aus den Natur- oder Sozialwissenschaften, setzen die Schüler ihre Kenntnisse mathematischer Methoden vorteilhaft ein. Insbesondere Anwendungen der natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktion verdeutlichen erneut deren Bedeutung für die Beschreibung von Vorgängen in der Natur und der Technik. Die Jugendlichen führen Flächenberechnungen durch und bearbeiten wiederum Extremwertaufgaben, wobei auch Bezüge zur Geometrie aufgezeigt werden. Bei der Untersuchung von Verknüpfungen bekannter Funktionen wird der Blick dafür geschärft, möglichst geschickt wesentliche Eigenschaften von Funktionsgraphen zu erkennen.

- Anwendungen, insbesondere bei Wachstums- und Zerfallsprozessen und bei Fragen der Optimierung (z. B. Einbeschreibungs- oder Abstandsprobleme)
- Untersuchungen an verknüpften Funktionen